Математика I

за први разред гимназије

Растко Вуковић, проф.

скрипта за наставу држану 2010-11. ш.г. у Бањој Луци

Гимназија Бања Лука

Математика за I разред гимназије

Скрипта за наставу држану 2010-11. ш.г. у Бањој Луци.

Садржај

Математика за I разред гимназије 2
I Логика 5
1. Алгебра исказа 5
1.1 Примјери 6
1.2 Операције 6
1.3 Примјери 8
1.4 Теореме логике исказа 10
1.5 Прекидачи 11
2. Скуп 13
2.1 Скуповне операције 13
2.2 Примјери 15
2.3 Задаци 16
3. Релација 18
3.1 Примјери 18
4. Функција 21
4.1 Бијекција 21
4.2 Инверзна функција 24
4.3 Композиција функција 25
4.4 Задаци 26
II Бројеви 28
5. Цијели бројеви 28
5.1 Математичка индукција 28
5.2 Дјељивост 30
5.3 Конгруенције 34
6. Разломци 36
6.1. Аритметика 36
6.2. Пропорције 38
6.3. Примјене пропорција 40
6.4. Комбинаторика 44
7. Изрази 46
7.1. Ирационални бројеви 46
7.2. Растављање на факторе 48
7.3. Поједностављивање 49
8. Задаци 51
III Геометрија 55
9. Аксиоме 56
9.1. Аксиоме везе, инциденције 57
9.2. Аксиоме распореда 59
9.3. Аксиоме подударности 60
9.4. Аксиома паралелних 61
9.5. Аксиоме непрекидности 62

10. Углови ... 62
10.1. Углови са паралелним крацима ... 63
10.2. Углови са окомитим крацима ... 64
10.3. Углови на кружници ... 66
10.4. Задаци ... 67
11. Подударност ... 67
11.1. Подударност троуглова ... 68
11.2. Подударност и четвороугао ... 70
11.3. Подударност и круг ... 73
11.4. Значајне тачке троугла ... 75
11.5. Неједнакост троугла ... 77
IV Симетрије ... 80
12. Конструкције ... 80
12.1. Конструкција троугла ... 81
12.2. Конструкције равних фигура ... 83
13. Изометрије ... 86
13.1. Осна симетрија ... 87
13.2. Централна симетрија ... 89
13.3. Ротација ... 92
13.4. Транслација ... 93
14. Сличност ... 93
14.1. Талесова теорема ... 94
14.2. Хомотетија ... 97
14.3. Сличне фигуре ... 98
15. Примјене симетрија ... 102
15.1. Примјери ... 102
15.2. Задаци ... 105
V Алгебра ... 107
16. Једнакости ... 108
16.1. Линеарне једначине ... 109
16.2. Детерминанте ... 113
16.3. Рационалне једначине ... 118
17. Неједнакости ... 121
17.1 Неједначине ... 121
17.2. Важније неједнакости ... 123
17.3. Линеарно програмирање ... 126
VI Вектори ... 130
18. Орјентисана дуж ... 130
18.1. Сабирање вектора ... 130
18.2. Декартове координате ... 133
18.3. Једначина праве ... 137
19. Матрице ... 139
19.1. Основне операције ... 139
19.2. Инверзна матрица ... 145
19.3. Још неке особине матрица ... 148
VII Полиноми ... 153

20. Алгебарске особине полинома 154
20.1. Једнакост полинома 154
20.2. Еуклидов алгоритам дјељења 156
20.3. Безуов став 159
21. Неке примјене полинома 162
21.1. Непосредни проблеми 162
21.2. Рационални изрази 163
21.3. Примјери графова 164
VIII Тригонометрија 170
22. Правоугли троугао 170
22.1. Дефиниције тригонометријских функција 170
22.2. Вриједности за основне углове 173
22.3. Површине 175
23. Рјешавање троуглова 178
23.1. Синусна теорема 179
23.2. Косинусна теорема 181
24. Геометријски задаци 184
24.1. Пројективна геометрија 184
24.2. Пол и полара 188

I Логика

1. Алгебра исказа

Алгебра исказа је грана математике која која се бави извјесним, врло елементараним дијелом логике.
Исказ, суд, односно тврдња је смислена декларативна изјава, за коју важе принципи искључења трећег и контрадикције.

У филозофији, то је најближе формалистичком начину гледања на математику и логику. Формализам је филозофски правац заснован од Девида Хилберта и његових сљедбеника, прво одвајањем формалне од садржајне математике. Даље, формалисти иду досљедно ка схватањима математике као „игре“ манипулацијом знаковима, са тачно прописаним правилима. За разлику од других игара, на примјер шаха, правила игре за математичке манипулације нису дата произвољно, већ су дубоко у самој суштини универзума. Даље, формалисти налазе да је крајњи задатак математике да покаже неконтрадикторност формалне теорије, да се унутар теорије не могу наћи двије узајамно супротне тврдње. Међутим, расправе о логичким основама математике још увијек су отворена тема.

Насупрот формалистима, за интуиционисте је управо обрнуто, логика је грана математике, али не и њена основа. Према интуиционистима, математички објекти су знања и методе којима се ти објекти могу изградити. Математичко расуђивање јест једнако мисаоним конструкцијама математичких објеката у нашем духу, у мислима. Интуиционисти рецимо не признају доказе свођењем на контрадикцију, не прихватају нееуклидску геометрију, али се и сами међусобно не слажу потпуно у питањима што је у математици легитимно.

Треће, филозофско гледање на логику и математику и још увијек је актуелно је такозвано логицистичко схватање. Логицистичку концепцију, да се математика заснива на логици заступали су филозофи Фреге, а затим Расел и Витехед. Они су у свом монументалном дјелу „Принципи математике“ покушали довршити логицистичко гледиште на математику, да је логика грана математике, али њихов тзв. Аксиом редуцибилитета није успио издржати критике.

Што се истинитости тиче сваки исказ има једну и само једну вриједност: исказ је тачан, или је нетачан, тј. лажан, и то је само описна дефиниција исказа.

1. сваки исказ има бар једну од особина тачности или нетачности (тј. нема исказа који не би био нити тачан нити нетачан);
2. сваки исказ има највише једну од особина тачности или нетачности (тј. Нема исказа који би био и тачан и нетачан).

Ако је исказ A тачан пише се $\tau(A) = T$ (чит. „те“), а ако је нетачан писаће $\tau(A) = \perp$ („не-те“). Умјесто T и $\perp$ користе се и ознаке 1 и 0. У том случају ове симболе не треба схватати као бројеве.

1.1 Примјери

1.1.1 „2+3=5“ је тачан исказ. „2+3=6“ је нетачан исказ.

1.1.2 „Збир углова троугла је 180°“ је тачан исказ.

1.1.3 „Ако је јуче био понедељак онда је данас сриједа“ је нетачан исказ.

1.1.4 „Број дјељив са два је дјељив са три“ није исказ, јер је није искључиво тачан, односно нетачан. На примјер, бројеви 4 и 6 су оба парни, а само други је дјељив са три.

1.1.5 „Ја сада лажем“ није исказ. Наиме, претпоставимо ли да је реченица истинита, онда ја сада лажем па она није тачна. Претпоставимо ли да је реченица неистинита, онда ја сада не лажем, што значи да она није неистинита. Дакле, реченица нити је тачна нити је нетачна, што значи да то није исказ!

1.2 Операције

Основне три операције алгебре исказа су негација, дисјункција („или“) и коњукција („и“). Прва је унарна, што значи да дјелује на јединичним исказима, као на примјер знак броја, а остале двије су бинарне, што значи их користимо за парове исказа, као што су то операције сабирања и множења за бројеве.

Негација исказа A је исказ $\neg A$ (читај „не-а“) који је тачан ако и само ако је исказ A нетачан. Негација тачног је нетачно, а негација нетачног је тачно.

Дисјункција исказа A, B је исказ $A \vee B$ („а или б“, „а дисјункција б“) који је нетачан ако и само ако су оба дата исказа нетачни. Да би дисјункција била тачна, довољно је да бар један од датих исказа буде тачан. На примјер, „данас је понедељак или је уторак“ је дисјункција исказа „данас је понедељак“ и исказа „данас је уторак“.

Коњукција исказа A, B је исказ $A \wedge B$ („а и б“, „а коњукција бе“) који је тачан ако и само ако су оба дата исказа тачни. Да би коњукција била тачна, потребно је да оба од датих исказа буду тачни. На примјер, „данас је први понедељак у мјесецу октобру“ је коњукција исказа „данас је понедељак“ и исказа „октобар је“.

Негација, дисјункиција и коњукција исказа могу се представити таблицама:

A	**$\neg$A**
T	$\perp$
$\perp$	T

$\vee$	T	$\perp$
T	T	T
$\perp$	T	$\perp$

$\wedge$	T	$\perp$
T	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Из ових основних могу се извести све остале операције алгебре исказа, од којих су сљедеће три бинарне операције најпознатије: ексклузивна дисјункција, импликација и еквиваленција.

Ексклузивна дисјункција исказа A, B је исказ $A \veebar B$ („или је A или је B„) који је тачан ако и само ако је тачно један од исказа тачан. Да би ексклузивна дисјункција била тачна мора само један од исказа бити тачан. На примјер, „данас или је понедељак или је уторак“ је исказ који неће бити тачан у дане од сриједе до недеље.

Импликација исказа A, B је исказ $A \Rightarrow B$ (нпр. „из A слиједи B“) који је нетачан само када је претпоставка A тачна, а посљедица B нетачна. Импликација је тачна ако је претпоставка нетачна, или ако су претпоставка и посљедица тачне. На примјер, „ако пада киша онда је травњак мокар“ би могла бити тачна импликација исказа „пада киша“ и „травњак је мокар“.

Еквиваленција исказа A, B је исказ $A \Leftrightarrow B$ (нпр. „A је ако и само ако је B“) који је тачан само када су искази исте вриједности, тј. оба су тачни (T), или су оба нетачни ($\bot$).

Ексклузивна дисјункција, импликација и еквиваленција се могу представити таблицама:

$\veebar$	**T**	$\bot$
T	$\bot$	T
$\bot$	T	$\bot$

$\Rightarrow$	**T**	$\bot$
T	T	$\bot$
$\bot$	T	T

$\Leftrightarrow$	**T**	$\bot$
T	T	$\bot$
$\bot$	$\bot$	T

Таутологија је формула, реченица, односно исказ алгебре исказа која је увијек тачна. Аксиоме су посебно једноставне таутологије из којих се могу извести све остале операције. Постоји пет група аксиома логике исказа.

Највиши приоритет има негација, за њом сљеде дисјункција и коњукција, а најнижи приоритет имају импликација и еквиваленција.

Примјер 1.2.1. Таутологије су **Де Морганови закони**:

а) $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$;	**б)** $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b$.

Доказ: формирајмо таблицу вриједности за **а)**

a	b	$a \vee b$	$\neg(a \vee b)$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \wedge \neg b$	$\Leftrightarrow$
T	T	T	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	T
T	$\bot$	T	$\bot$	$\bot$	T	$\bot$	T
$\bot$	T	T	$\bot$	T	$\bot$	$\bot$	T
$\bot$	$\bot$	$\bot$	T	T	T	T	T

1.3 Примјери

1.3.1 Провјерити тачност израза:

(a) $\neg(2{,}3456 - 1{,}2345 = 10/9)$; (b) $\left(\frac{17}{19} < \frac{11}{13}\right) \vee \left(\frac{5}{7} > \frac{3}{5}\right)$;

(c) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\right) \wedge \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}\right)$; (d) $\left(\frac{17}{19} > \frac{13}{15}\right) \Rightarrow \left(\frac{13}{15} > \frac{9}{11}\right)$.

1.3.2 За природне бројеве важи:

(a) $(m > n > 2) \Rightarrow \left(\frac{m}{n} > \frac{m-2}{n-2}\right)$; (b) $\left(\frac{m+1}{n+1} < \frac{m+2}{n+2}\right) \Rightarrow \left(\frac{m}{n} < \frac{m+1}{n+1}\right)$.

1.3.3 Представити (a) ексклузивну дисјункцију; (b) импликацију; (c) еквиваленцију; помоћу негације, дисјункције и коњукције исказа.

Има више начина, на примјер:
(a) A & B = (A ∧ ¬B) ∨ (¬A ∧ B);
(b) A ⇒ B = B ∨ ¬A;
(c) A ⇔ B = (A ∨ ¬B) ∧ (¬A ∨ B).

1.3.4 Провјерити тачност **аксиома импликације**:
(i) A ⇒ (B ⇒ A);
(ii) ((A ⇒ B) ⇒ A) ⇒ A;
(iii) (A ⇒ B) ⇒ ((B ⇒ C) ⇒ (A ⇒ C)).

Доказ за (i), контрадикцијом супротне претпоставке.
Претпоставка је A, а посљедица је исказ у загради (тј. B ⇒ A). Да би та импликација била нетачна, морала би бити претпоставка тачна (тј. A = T) и посљедица нетачна (импликација у загради). Опет, да би импликцација у загради била нетачна, морало би бити B тачно (B = T) и A нетачно (A = ⊥). Добили смо за исто A, прво тачно, а затим нетачно, што је контрадикторно. Према томе није могућа нетачност дате импликације. То значи да је импликација увијек тачна.

1.3.5 Провјерити тачност **аксиома коњукције**:
(iv) A ∧ B ⇒ A;
(v) A ∧ B ⇒ B;
(vi) (A ⇒ B) ⇒ ((A ⇒ C) ⇒ (A ⇒ B ∧ C)).

Доказаћемо (vi) помоћу таблице свих могућих комбинација вриједности:

A	**B**	**C**	**A ⇒ B**	**A ⇒ C**	**A ⇒ B ∧ C**	**(A ⇒ C) ⇒ (A ⇒ B ∧ C)**	**⇒**
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	⊥	T	⊥	⊥	T	T
T	⊥	T	⊥	T	⊥	⊥	T
T	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	T	T

⊥	T	T	T	T	T	T	T
⊥	T	⊥	T	T	T	T	T
⊥	⊥	T	T	T	T	T	T
⊥	⊥	⊥	T	T	T	T	T

Према томе, колона десно, формула (vi) је увијек тачна.

1.3.6 Провјерити тачност **аксиома дисјункције**:
(vii) $A \Rightarrow A \vee B$;
(viii) $B \Rightarrow A \vee B$;
(ix) $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C))$.

1.3.7 Провјерити тачност **аксиома еквиваленције**:
(x) $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$;
(xi) $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$;
(xii) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B))$.

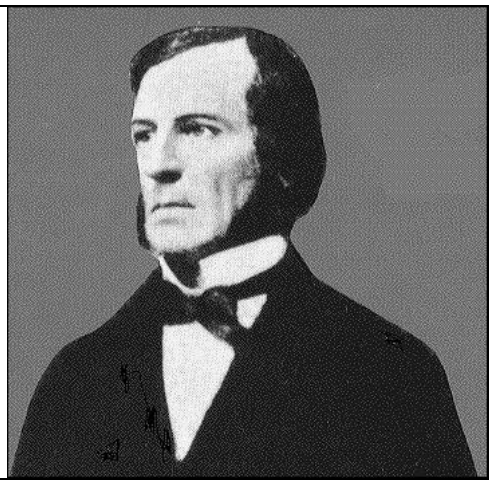
1.3.8 Провјерити тачност **аксиома негације**:
(xiii) $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$;
(xiv) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A)$;
(xv) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$.

1.3.9 Провјерити комутативност, асоцијативност и дистрибутивност дисјункције и коњукције. Провјерите да су дисјункција и коњукција узајамно дистрибутивне.

Рецимо да су операције означене тачком и знаком плус, имаћемо:
ако је тачно $a \cdot b = b \cdot a$ за свако a, b тада важи **закон комутације** за „тачку“;
ако је тачно $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ за свако a, b, c тада важи **закон асоцијације**;
ако је тачно $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ за свако a, b, c тада важи **закон дистрибуције** операције тачка према операцији плус.

Енглески логичар и математичар **Џорџ Бул** је 1854. године написао „Испитивање законитости мишљења“ гдје је компликоване логичке везе свео на једноставне изјаве алгебре логике, на операције негације, дисјункције, коњукције, импликације, еквиваленције и на вриједности истина / лаж.

Он је први примјенио нове алгебарске технике на логичке процесе због чега алгебру исказа називамо и Булова алгебра.



1.4 Теореме логике исказа

Рекли смо да у алгебри исказа реченицу која је увијек тачна називамо таутологија. Посебно, оне таутологије које се могу доказивати, изводити помоћу правила модус поненс опште логике, називамо теореме. Оне истакнуте теореме које су нарочито једноставне, опште и корисне за почетак низа дедукција називамо аксиомама.

Дефиниција теорема:

1. Сваки аксиом логике исказа је теорем логике исказа;
2. Ако су формуле A и $A \Rightarrow B$ теореме онда (*Modus ponens*) је и формула B теорем;
3. Теореме су само оне формуле које се могу добити (вишеструком) примјеном претходна два корака.

Ако је нека формула, или шема формула A теорем, онда пишемо |- A, што читамо „теорем A“.

Након открића алгебре логике показало се да за извођење великог броја теорема неком дедукцијом треба релативно мали број аксиома. То је један од разлога зашто су некада важни основни закони класичне логике престали бити основни у математичкој логици. Показало се да ће други систем аксиома, другачији основни скуп таутологија дати у бити исти скуп теорема алгебре логике. При томе се може мјењати потреба за основним методама закључивања алгебре исказа.

Неке методе закључивања:

1. (*Modus ponens*). Ако су формуле A и $A \Rightarrow B$ истините, онда је истинита и формула B;
2. (*Demonstratio per enumerationem* – доказ набрајањем). Ако су формуле $A \Rightarrow C$ и $B \Rightarrow C$ истините, онда је истинита и формула $(A \vee B) \Rightarrow C$;
3. (*Deductio ad absurdum* – довођење у противрјечност). Ако су формуле $A \Rightarrow B$ и $A \Rightarrow \neg B$ истините, онда је истинита формула $\neg A$.

Докази ових метода су једноставни. На примјер, за (1) може се показати да је B тачно за сваку вриједност A и дате импликације. Заиста, ако је $\tau B = \bot$, онда због тачности импликације мора бити A нетачно. Како је A тачно, то мора бити $\tau B = T$. Наравно, ове и сличне методе су старије од алгебре логике и често их сматрамо интуитивно јасним и тачним по себи.

Примјери теорема:

1. $A \vdash B \Rightarrow A$ (ако је тачно A онда је тачан теорем да из B слиједи A);
2. $A \Rightarrow B \vdash (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ (ако је $A \Rightarrow B$ онда важи теорем ...);
3. $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash B \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ (ако је $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow C$ онда важи теорем ...);
4. $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (Хилберт-Бернајсов аксиом негације);
5. $\vdash (A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ (Хилберт-Бернајсов аксиом импликације);
6. $\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$;
7. $\vdash (((B \Rightarrow C) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;
8. $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;

9. $\vdash \neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$ (Де Морганови образци);
10. $\vdash \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$.

Докази. (1) аксиома (i), модус поненс. (2) аксиома (iii), модус поненс. (3) аксиома (ii), модус поненс. Међутим, на нивоу средње школе овакве теореме, или таутологије доказујемо прије свега таблицама истинитости, рјеђе свођењем на противрјечност, а само евентуално дедукцијом из аксиома.

Квантори, или квантификатори су ријечи сваки ($\forall$) и постоји ($\exists$). На примјер, реченицу „постоји природан број x који је мањи или једнак од сваког природног броја y“ можемо написати овако:

$$(\exists x \in \mathbf{N})(\forall y \in \mathbf{N})(x < y),$$

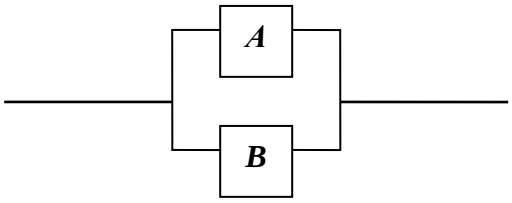
и као што знамо, тај природан број је $x = 1$.

Задатак 1.4.1. Да ли је сљедећа формула тачна и зашто?
а) $(\forall x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R})(x < y)$; **б)** $(\exists x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})(x < y)$;
в) $(\exists a \in \mathbf{Z})(\forall b \in \mathbf{Z})(a + b = 0)$; **г)** $(\forall a \in \mathbf{Z})(\exists b \in \mathbf{Z})(a + b = 0)$;
гдје је **R** је скуп реалних, а **Z** цијелих бројева.

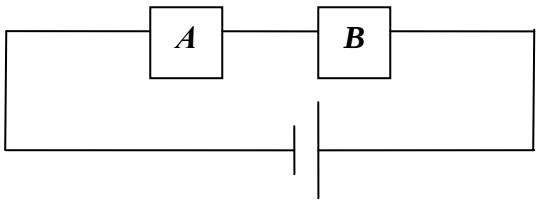
1.5 Прекидачи

Једна од необичних примјена алгебре логике је у моделирању електричних склопова са прекидачима. У колу електричне струје, исказу тачно додјељујемо прекидач који дозвољава ток струје, а исказу нетачно стање искључено. **Константама** тачно, односно нетачно одговарају редом хоризонтална, односно вертикална позиција водича струје у прекидачу. Тада константа тачно у хоризонтално цртаном проводнику значи да струја може тећи, а у вертикалном да не тече.

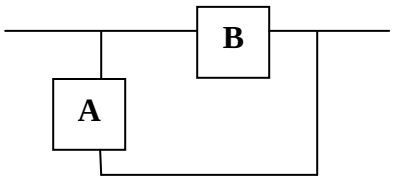
Дисјункцији двије или више промјенљивих одговара паралелни спој прекидача. Кроз овај спој $A \vee B$ струја тече ако је бар један од прекидача укључен (T):



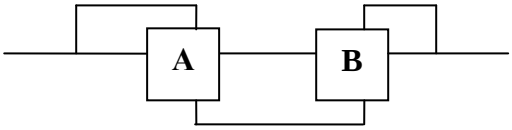
Коњукцији двије или више промјенљивих одговара серијски спој прекидача. На слици имамо шему исказа $A \wedge B$, који је тачан акко су оба исказа тачни:



Импликацији $A \Rightarrow B$ одговара спој као на сљедећој слици:



Еквиваленција $A \Leftrightarrow B$ се може представити шемом:



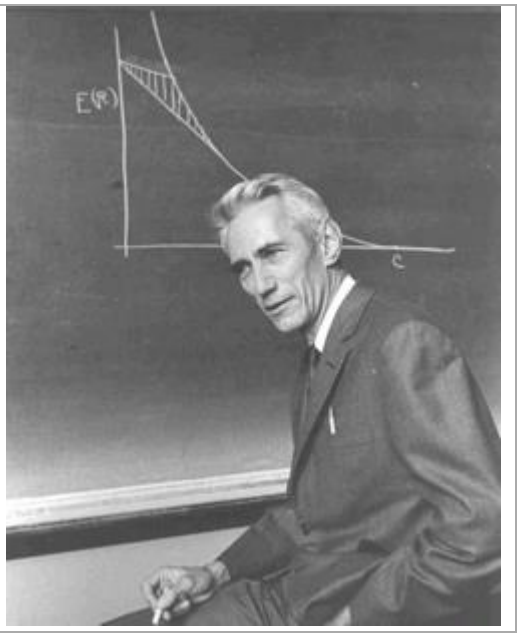
1.5.1 Представити шемом прекидача формуле: $A \vee (B \vee C)$, $A \wedge (B \wedge C)$.

1.5.2 Доказати шемама прекидача формуле, законе дистрибуције:
(1) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$; (2) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

На слици десно је **Клод Елвуд Шенон** (*Claude Elwood Shannon*, 1916. – 2001), амерички научник који је радио као инжењер у лабораторијама тадашње Белове компаније за телефонију.

Шенон је као 21-годишњи студент МИТ-а написао тезу гдје доказује да примјеном Булове алгебре на дигитална електрична кола можемо рјешити било који логички или нумерички проблем. Открио је везу између таблица истинитости и електричних кола 1939.

Шенон је развио и математичку теорију информације 1948. године, коју је неколико година раније проучавао инжењер Хартли.

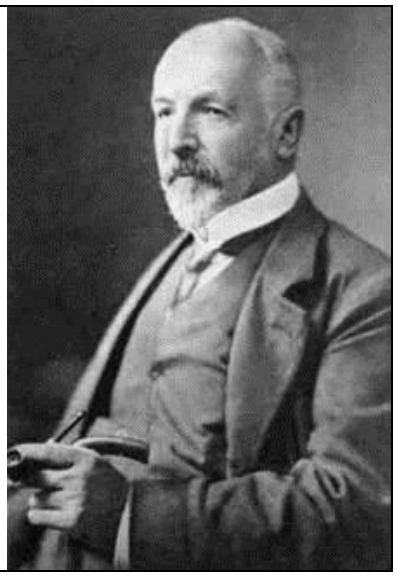


2. Скуп

Овдје ћемо се бавити само интуитивном, а не аксиоматском теоријом скупова. Скуп је основни појам у математици и представља колекцију различитих елемената. Скупови могу имати коначно, или бесконачно много елемената. Два су скупа једнака само када имају све елементе једнаке.

Оснивач теорије скупова био је **Георг Кантор** (1845 – 1918), њемачки математичар рођен у Русији. Почев од 1874. па наредних 10 година он је радио на оснивању математичке теорије скупова. Био је свјестан великог утицаја свог рада и на филозофију.

Кантор је дефинисао је бесконачне и добро уређене скупове, обострано једнозначно пресликавање и доказао да је бесконачност реалних бројева вишег реда од бесконачности природних, цијелих бројева или разломака. Открио је тзв. Канторов теорем који говори о егзистенцији бесконачног мноштва бесконачности. Дефинисао је аритметику бројева елемената коначних, односно бесконачних скупова, које је називао редом кардинали и ординали.



2.1 Скуповне операције

Означимо са S скуп чији су елементи три боје српске, или рецимо француске заставе. Означимо са E скуп плаво-жутих боја европске заставе, или заставе БиХ. Затим, означимо са B скуп боја црно-жуто-црвене заставе Белгије, или Њемачке. То су скупови боја:

$S = \{црвена, плава, бијела\}$, $E = \{плава, жута\}$, $B = \{црна, жута, црвена\}$.

Кардинални број, односно број елемената ових скупова је редом $|S| = 3$, $|E| = 2$, $|B| = 3$. Редосљед елемената није битан, а такође скуп остаје исти ако би неки од његових елемената писали више пута. Елеменат „црна“ боја припада само скупу B, што пишемо $црна \in B$. Међутим, елеменат „црвена“ боја припада датим скуповима S и B, елеменат „плава“ припада скуповима S и E, а „жута“ скуповима E, B. То можемо писати:

$$црвена \in S,\ црвена \in B;$$
$$плава \in S,\ плава \in E;$$
$$жута \in E,\ жута \in B.$$

Пресјек скупова је скуп њихових заједничких елемената. Прецизније, скуп

$$P = S \cap B$$

је пресјек скупова S и B ако и само ако $x \in P \Leftrightarrow x \in S \wedge x \in B$. То исто пишемо

$$P = \{x | \, x \in S \wedge x \in B\},$$

тј. P је скуп елемената x таквих да x припада S и x припада B. Пресјек овдје датих скупова је скуп са једним елементом $P = \{црвена\}$. Пресјек ових скупова P и E је празан скуп, тј. $P \cap E = \varnothing$.

Унија скупова је скуп свих елемената. Прецизније, скуп

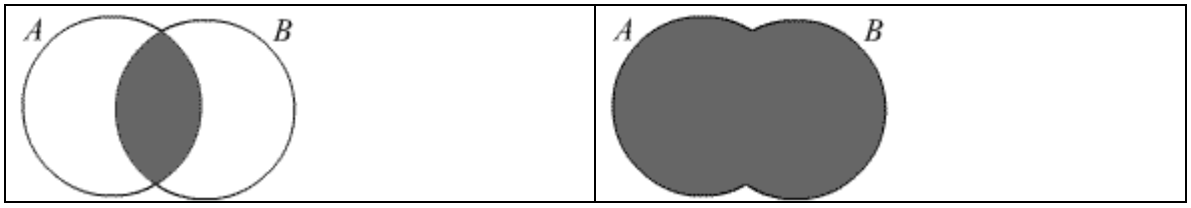
$$U = S \cup B$$

је унија скупова S и B ако и само ако $x \in U \Leftrightarrow x \in S \vee x \in B$. То исто пишемо

$$U = \{x | \, x \in S \vee x \in B\},$$

тј. U је скуп елемената x таквих да x припада S или x припада B. Унија овдје датих скупова је скуп са пет елемената $U = \{црвена, плава, бијела, црна, жута\}$.

Пресјек и унију скупова можемо сликовито представити (Веновим) дијаграмима:



Подскуп датог скупа је скуп који садржи дио његових елемената. Пишемо

$$S \subseteq U$$

и читамо S је подскуп U ако и само ако је сваки елемент из S уједно и елемент из U. Другим ријечима $x \in S \Rightarrow x \in U$.

Теорем 2.1.1 Нека су A и B скупови. Тада $A = B$ ако и само ако $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. ♦

Теорем 2.1.2 Нека су A и B скупови. Тада су тачне реченице:

1. $A \subseteq A \cup B$ и $B \subseteq A \cup B$;
2. $A \cap B \subseteq A$ и $A \cap B \subseteq B$. ♦

Разлика два скупа је скуп елемената из првог од скупова којем су одстрањени елементи присутни у другом скупу. Прецизније, скуп

$$R = S \setminus B$$

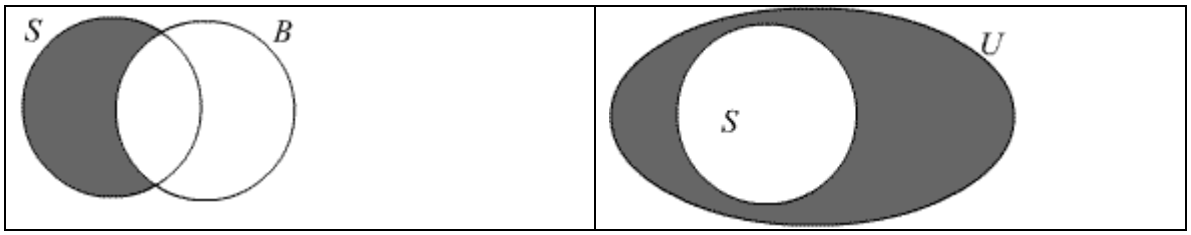
је разлика скупова S и B ако и само ако $x \in R \Leftrightarrow x \in S \wedge x \notin B$. То исто пишемо

$$R = \{x | \, x \in S \wedge x \notin B\},$$

тј. R је скуп елемената x таквих да x припада S и x не припада B. Разлика овдје датих скупова је скуп са два елемента $R = \{плава, бијела\}$.

Релативни комплемент скупа S у односу на U је скуп свих елемената из U који нису у S. То је исто што и разлика $U \setminus S$. Када U садржи све актуелне елемента тада пишемо кратко $S' = \{x | \, x \notin S\}$, тј. комплемент скупа S је скуп свих елемената који нису у S.

Сљедећи дијаграми представљају разлику и комплемент скупова



Партитативни скуп је скуп свих подскупова. За скуп S, партитативни скуп пишемо $\wp(S)$ и дефинишемо га као скуп $\{A | \, A \subseteq S\}$. За овдје дати скуп боја

$\wp(S) = \{\varnothing, \{црвена\}, \{плава\}, \{бијела\}, \{црвена, плава\}, \{црвена, бијела\}, \{плава, бијела\}, S\}$.

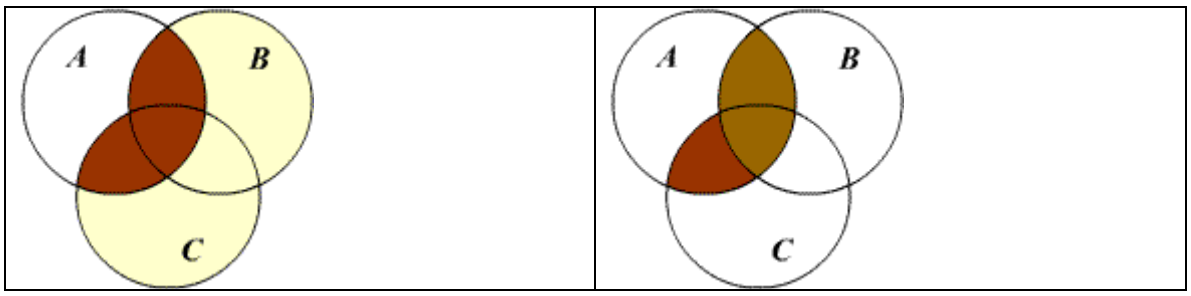
Овај $\wp(S)$ има 2^3 елемената.

Декартов производ скупова A, B је скуп уређених парова њихових елемената. Прецизније, то је скуп

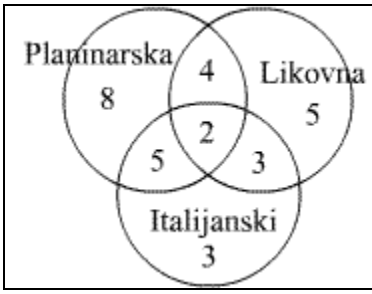
$$A \times B = \{(x, y) | \, x \in A \wedge y \in B\}.$$

2.2 Примјери

2.2.1 Важење закона дистрибуције $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ произвољних скупова A, B, C се може разумјети помоћу сљедећих дијаграма.



2.2.2 У једном разреду је свих 30 ђака уписано у бар једну од секција: планинарску, ликовну и италијанског језика. У планинарској секцији је 19 ђака, у ликовној 14, а 13 ђака учи италијански језик. Чланова планинарске и ликовне секције је 6 ученика, ликовне и италијанске 5, италијанске и планинарске 7. Само 2 ученика су чланови све три секције истовремено. Колико ученика су чланови само планинарске секције?



Нацртајте Венов дијаграм три скупа P, L, I. Ставите број 2 у пресјек сва три. Преостали су бројеви 4, 3, 5 редом за пресјеке планинарске и ликовне, затим ликовне и италијанске, па италијанске и планинарске.

На крају израчунајте, самих **планинара има 8**, ликовњака 5, италијана 3. Укупно, збир је 30.

2.2.3 Доказати Де Морганове образце за скупове помоћу табеле припадања:
за произвољне скупове A, B, C је $(A \cup B)' = A' \cap B'$ и $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Произвољан елеменат може да припада односно да не припада датом скупу. У табели су представљени сви кораци, скупови за први Де Морганов образац. Налазимо да су сјенчене колоне, лијева и десна страна једнакости подударне.

A	B	$A \cup B$	$(A \cup B)'$	A'	B'	$A' \cap B'$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$

2.2.4 Помоћу дефиниције, доказати тачност закона дистрибуције за Декартов производ скупова: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, за свака три дата скупа.

Доказ. Произвољан елеменат лијеве стране је уређени пар (x, y). Даље је $(x, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$. Затим, на основу закона дистрибуције алгебре исказа имамо еквивалентан исказ $(x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \Leftrightarrow ((x, y) \in A \times B) \vee ((x, y) \in A \times C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$. Према томе, исти је елеманат и на десној страни, што значи да су лијева и десна страна једнаки скупови. ♦

2.3 Задаци

2.3.1 Одредити скупове A, B, C ако је дато: $A \cup C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $B \cup C = \{d, e, f, g\}$, $A \cap C = \{e\}$, $B \cap C = \{e, f\}$, $A \setminus B = \{a, b, c\}$, $B \setminus C = \{d\}$.

2.3.2 Одредити скупове M, N, P ако је дато: $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$N \cup P = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $P \cup M = \{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$, $M \cap N = \{5, 6\}$, $N \setminus P = \{7, 8\}$.

2.3.3 За произвољне скупове A и B доказати:
(**a**) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$; (**b**) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$;
(**c**) $A \cup (A \cap B) = A$; (**d**) $A \cap (A \cup B) = A$.

2.3.4 Нека су A и B коначни подскупови скупа S. Показати да је тада
(**a**) ако $A \cap B = \varnothing$ онда $|A \cup B| = |A| + |B|$;
(**b**) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$;
(**c**) $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$.

2.3.5 Ако скуп S има (**a**) 10; (**b**) 12; елемената, колико елемената има партитативни скуп $\wp(S)$?

2.3.6 Доказати законе комутације и асоцијације скупова за (**a**) пресјек; (**b**) унију.

2.3.7 Доказати да за свака три скупа A, B, C важе једнакости
(**a**) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; (**b**) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

2.3.8 Доказати да је тачно, или навести контрапримјер
(**a**) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;
(**b**) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup C$;
(**c**) $(A \setminus B)' = (B \setminus A)'$;
(**d**) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
(**e**) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

2.3.9 Симетрична разлика скупова A и B је скуп

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

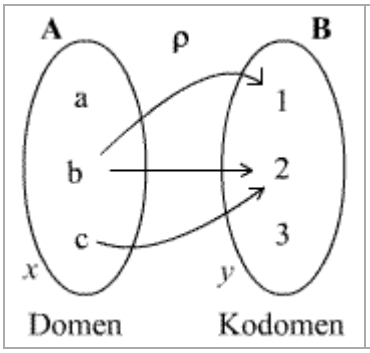
(**a**) Ако је $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{b, c, d, e\}$, наћи $A \Delta B$.
(**b**) Нацртати Венов дијаграм симетричне разлике скупова.
(**c**) Показати да је $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Резултати 2.3 (**1**) $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{d, e, f\}$, $C = \{e, f, g\}$; (**2**) $M = \{1, 3, 5, 6\}$, $N = \{2, 4, 5, 6\}$, $P = \{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$. (**5**a) $2^{10} = 1024$.

3. Релација

Релација је један од основних појмова математике, толико да понекад саму математику разумијемо као проучавање релација. Мало одређеније кажемо да је релација скуп уређених елемената.

Бинарна релација, или једноставно релација ρ скупова A и B је непразан подскуп Декартовог производа A × B. Први од скупова назива се домен, а други кодомен.



На слици лијево имамо релацију ρ која је подскуп Декартовог производа A × B:

$$\rho = \{(b,1), (b,2), (c,2)\},$$

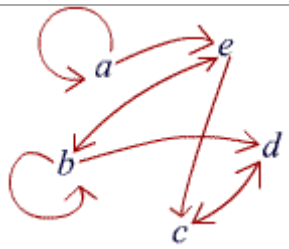
тј. (b,1), (b,2), (c,2) ∈ ρ, односно bρ1, bρ2, cρ3. Скуп A, скуп x-ова, је домен, а скуп B, y-она је кодомен (или ранг). Стрелице наглашавају да нпр. (b,1) ≠ (1,b).

Овдје ћемо се бавити само бинарним релацијама.

3.1 Примјери

3.1.1. На слици десно дат је граф релације ρ. Претставити релацију скупом уређених парова.

Рјешење: ρ = {(a,a), (a,e), (b,b), (b,d), (b,e), (c,d), (d,c), (e,c)}.♦



3.1.2 Нека су дати скупови A = {a, b, c} и B = {1, 2}. Колико релација је могуће добити овим скуповима?

Рјешење: Декартов производ је A × B = {(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)}. То је скуп са |A × B| = |A|·|B| = 3·2 = 6 елемената, уређених парова. Такав скуп има $2^6 = 64$ подскупа, укључујући и празан скуп, а на њему је могуће дефинисати 63 различите релације (сви подскупови осим празног). Декартов производ B × A даће још 63 релације. Дакле, максимално је могуће добити 126 релација.♦

3.1.3 Скуп цијелих бројева је **Z** = {…, -1, 0, 1, 2, 3, …}. Нека је ρ скуп свих уређених парова (m,n) ових бројева, таквих да је m < n, тј.

$$\rho = \{(m,n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid m < n\}.$$

Тада је ρ једна бинарна релација на **Z**.

3.1.4 Скуп су праве, а релација је паралелност, тако да $x\rho y$ читамо „права x је паралелна правој y“.

3.1.5 Скуп реалних бројева је **R**. Нека је $\rho = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$. Тада је ρ бинарна релација на **R**. Иначе, то је горња полукружница, са центром у (0,0) и полупречником 1 у еуклидској равни.

Када кажемо **релација на скупу** A тада мислимо на подскуп Декартовог производа $A \times A$. То су иначе најчешће релације.

Особине (или врсте) релација су:

- **Р**ефлексивност: $(\forall x)\ x\rho x$.
- **С**иметрија: $(\forall x,y)\ x\rho y \Rightarrow y\rho x$.
- **А**нтисиметрија: $(\forall x,y)\ x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y$.
- **Т**ранзитивност: $(\forall x,y,z)\ x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$.

У првом и другом од наведених примјера, све релације дефинисане на Декартовом производу, немају нити једну од наведених особина Р, С, А и Т.

У трећем примјеру, такође. Међутим, употребом неједнакости $m \leq n$ добили бисмо уређене парове цијелих бројева који имају особине Р, А и Т.

У четвртом примјеру, релација паралелности има особине Р, С и Т. Из геометрије знамо да „су двије праве паралелне ако се поклапају, или ако леже у истој равни а немају заједничких тачака“.

У петом примјеру, координате тачака полукружнице чине скуп који је релација са особином С.

Релација поретка је она која има особине Р, А, Т. Релација поретка је подскуп ($\subseteq$) у скупу скупова. То је и релација импликације у скупу исказа. Релација „мање или једнако“ у скупу бројева, „подскуп“ у скупу скупова, или „импликација“ у скупу исказа називају се и **инклузије.**

Релација еквиваленције је она која има особине Р, С, Т. Према томе, у четвртом наведеном примјеру имамо релацију еквиваленције. Релације еквиваленције су такође све врсте једнакости, у различитим скуповима. Једнакости бројева, једнакости скупова, једнакости (еквиваленције) исказа, итд. Када имамо релацију еквиваленције тада можемо дефинисати класу еквиваленције.

Класа еквиваленције је скуп $[x] = \{y \mid x\rho y\}$, гдје је ρ дата релација еквиваленције, на неком скупу A. Могуће је доказати да тада важе тврдње:

1. за све $x \in A$, $[x] \neq \emptyset$;
2. ако $y \in [x]$, тада је $[x] = [y]$, гдје $x, y \in A$;
3. за све $x, y \in A$, биће $[x] = [y]$, или $[x] \cap [y] = \emptyset$;

4. А је унија свих класа еквиваленције дате релације.

Количнички скуп је скуп свих класа еквиваленције дате релације.

Свака од правих у четвртом примјеру чини по једну класу еквиваленције.

3.1.6 Скуп природних бројева је **N** = {1, 2, 3, …}. Знамо да након дјељења природних бројева x, односно у са 3, остаци дјељења могу бити 0, 1, или 2. Нека је $(x,y) \in \rho$ онда када оба x, у имају исте остатке након дјељења са три. То пишемо

$$x\rho y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod 3,$$

тј. бројеви *x, y* су у релацији ρ ако и само ако имају исте остатке након дјељења са три. Ово је конгруенција, веома важна релација у алгебри и као што можемо лако провјерити, она је рефлексивна, симетрична и транзитивна, то је једна релација еквиваленције. Класе еквиваленције ове релације су:

[0] = {3, 6, 9, …} – сви природни бројеви који су дјељиви са три.
[1] = {1, 4, 7, …} – бројеви који након дјељења са три дају остатак један.
[2] = {2, 5, 8, …} – који након дјељења са три дају остатак два.

Сљедећа класа [3] била би једнака нултој, сљедећа [4] првој, итд. Према томе имамо само три класе еквиваленције за конгруенцију дјељења са три. Количнички скуп је {[0], [1], [2]}.

Примјетимо да је разлика произвољна два броја из исте класе број нулте класе [0], тј. дјељив је са три. Уопште, разлика два броја из двије дате класе је број са константним остатком. Према томе, исту релацију можемо дефинисати и овако

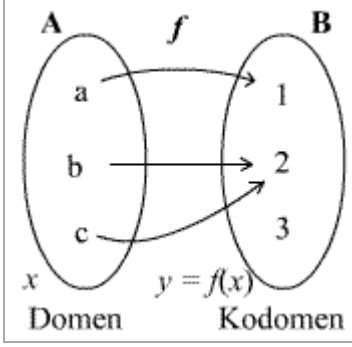
$$x\rho y \Leftrightarrow x - y \equiv 0 \pmod 3,$$

тј. природни бројеви *x, y* су у релацији ρ када је њихова разлика конгруентна нули по модулу три.

3.1.7 Нека је на скупу природних бројева дата релација парности. Израз $x\rho y$ читамо бројеви су исте парности, тј. оба су парна, или оба су непарна. Ова релација има особине P, C, T, тј. то је релација еквиваленције. Класе еквиваленције [2] и [1] су скуп парних бројева {2, 4, 6, …}, односно скуп непарних {1, 3, 5, …}.

4. Функција

Функција нарочита врста релације гдје се први елеменат само једном придружује другом. Са друге стране, други елеменат може бити вишеструка слика оригинала, али може и остати из пресликавања.



На слици је граф функције f: A → B, односно

$$f(a) = 1,\ f(b) = 2,\ f(c) = 2.$$

То је релација $f = \{(a,1), (b,2), (c,3)\}$ гдје се сваки од елемената из првог скупа, из домена појављује тачно по једном.

Прецизније:

$$(\forall x \in A)(\exists! y \in B)\ y = f(x),$$

тј. за свако икс из А постоји тачно једно ипсилон из бе тако да је ипсилон једнако еф од икс.

Функција f из X у Y је релација између непразних скупова X и Y, ако је X домен, тј. $\mathbf{D}(f) = X$, и када $(x,y_1), (x,y_2) \in f$ повлачи да је $y_1 = y_2$.

Другим речима, немамо двије различите слике за један исти оригинал. Обратно, можемо имати једну исту копију два од два раличита оригинала.

Лајбниц (Leibniz, 1646-1716) је изгледа био први који је употребио ријеч „функција“ за количинске релације које је представљао формулама и графом.

Клаиро (Clairant) је 1734. увео нотацију $f(x)$, а Ојлер (Euler, 1707-1783) ју је инензивно користио.

Дирихле (Dirichlet, 1805-1859), на слици лијево, дао је данашњу дефиницију функције.

4.1 Бијекција

Сирјекција, или „на“ пресликавање је функција код које је сваки елеменат скупа Y, тј. кодомена, слика неког оригнинала из домена. Прецизније, када:

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\ y = f(x),$$

тј. за свако ипсилон из бе постоји икс из а такво да је ипсилон једнако еф од икс.

Инјекција, или 1-1 пресликавање је функција код које је сваки елеменат скупа B, тј. кодомена, слика највише једног оригинала из домена. Прецизније, када:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

Примјер 4.1.1 Примјетите да на претходној слици графа, елеменат 3 из B није слика нити једног x из A. Према томе, дата функција f није сирјекција. Она такође није нити инјекција, јер је $2 \in$ B двострука копија, елемената b и c из A.

Примјер 4.1.2 Функција $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, тј. $f(1) = 3$, $f(2) = 4$, $f(3) = 4$, $f(4) = 1$ је добро дефинисана у Декартовом производу $\{1, 2, 3, 4\}^2 = \{1, 2, 3, 4\}\times\{1, 2, 3, 4\}$. У истом кодомену ова функција није сирјекција, а уопште није инјекција.

Примјер 4.1.3 Нека је подскуп $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ дефинисан овако $f = \{(n, 2n\text{-}3) \mid n \in \mathbf{Z}\}$. То је добро дефинисана функција $f(n) = 2n - 3$, јер је свако n само по једном оригинал. Наиме, постоји само један број $2n - 3$ за сваки број n.

Посебно, та функција није сирјекција јер, на примјер цијели број $m = 2$ није слика неког цијелог броја n. Наиме, из $2n - 3 = m$ слиједи $n = (m - 3)/2$, одакле се лако види да се парни цијели бројеви не могу добити овим пресликавањем.

Међутим, ова функција јесте инјекција, јер

$$f(n_1) = f(n_2) \Leftrightarrow 2n_1 - 3 = 2n_2 - 3 \Leftrightarrow n_1 = n_2 ,$$

тј. функција је инјекција.

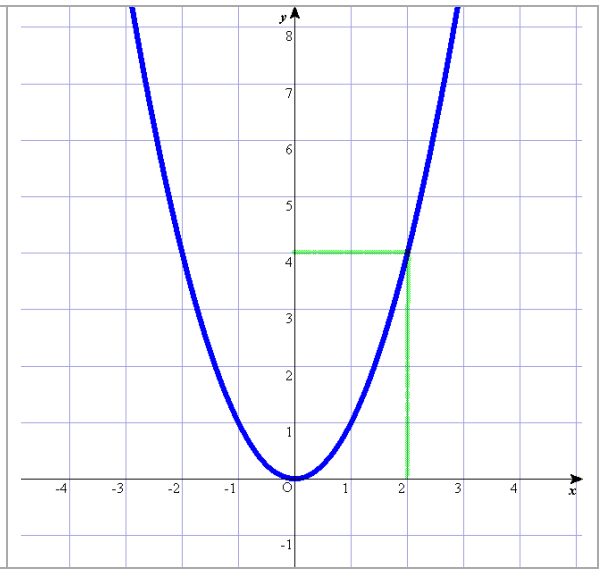
Примјер 4.1.4 Нека је функција $f = x^2$ са скупа свих реалних бројева на скуп позитивних реалних бројева. То је квадратна функција, тзв. парабола f: $\mathbf{R} \to [0, +\infty]$.

Знамо да сваки реалан број x има тачно један свој квадрат и да је сваки позитиван реалан број квадрат бар једног реалног броја. Према томе ово јесте функција и са друге стране, то је сирјекција.

На слици десно је граф квадратне функције $f = x^2$, тј. f: $x \to x^2$, у Декартовом правоуглом систему координата.

Оригинали пресликавања, скуп А, домен, су тачке хоризонталне x-осе. Копије пресликавања, скуп В, кодомен, су тачке y-осе. Кодомен израчунавамо квардрирањем броја из домена.

За x = 2, биће y = 4 и тачка (2, 4) функције је означена на графу окомитим пројекцијама на x и y-осу.



Међутим, ова функција није инјекција, јер на примјер $(+2)^2 = (-2)^2 = 4$, тј. постоје два оригинала ±2 за исту копију 4.

Бијекција, или обострано једнозначно придруживање је функција која је сирјекција и инјекција.

Примјер 4.1.5 Функција $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ је бијекција, тј. јесте сирјекиција и јесте инјекција. Овој функцији инверзна релација је такође функција: $g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Оно што је била копија за функцију то је оригинал за инверзну функцију и обрнуто, оригинал функције је копија њене инверзне функције.

Теорем 4.1.6. Само бијекција има инверзну функцију. ♦

Примјер 4.1.7 Провјерити да ли је функција $f(x+1) = x - 2$ бијекција.

Провјерити ћемо да ли та функција има инверзну функцију!

Међутим, прво треба наћи њен експлицитан израз, рјешити функционалну једначину. Да би разумјели шта је у ствари проблем са овом функцијом погледајмо сљедећи низ вриједности:

када је x = 1 тада имамо $f(2) = -1$,
када је x = 2 тада имамо $f(3) = 0$,
када је x = 3 тада имамо $f(4) = 1$,
када је x = 4 тада имамо $f(5) = 2$,
када је x = 5 тада имамо $f(6) = 3$,
... .

То нам даје идеју да уведемо смјену x+1 = t, одакле добијамо x = t – 1, па $f(t) = t - 3$,

односно $f(x) = x - 3$. Посљедње x је само ново име за претходно t. Добили смо исту почетну функцију, али сада у експлицитном облику.

Даље, провјеравамо има ли дата функција, тј. $f(x) = x - 3$, инверзну функцију. Ако има, то ће према теорему (4.1.7) значити да је она бијекција, дакле да је сирјекција и инјекција.

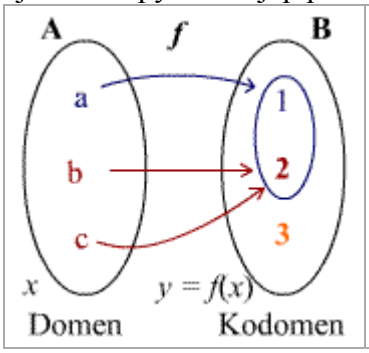
Ако је познат резултат r пресликавања $f(x) = x - 3$, онда је $x - 3 = r$. Отуда је оригинал пресликавања $x = r + 3$, па можемо за свако дато r дефинисати форму

$$f^{-1}(x) = x + 3.$$

То је заправо формула за налажење оригинала f^{-1} пресликавања када је дата копија x, инверзна функција. Да је то заиста функција знамо зато што за сваки број x постоји једниствен број $x + 3$, а то је овдје резултат пресликавања. Зато што има инверзну функцију, зато је дата функција бијекција.

4.2 Инверзна функција

Инверзна функција f^{-1} је пресликавање дате функције f „уназад“. Оно што је код функције копија то је код инверзне функције оригинал, и обрнуто што је за функцију оригинал пресликавања то је копија за инверзну функцију. При томе и један и други смијер релација морају бити једниствени на начин функције.



Рецимо, ако функција није сирјекција („на“) то значи да у скупу копија постоји бар један елеменат ($y \in B$) који није слика неког елемента из скупа оригинала ($x \in A$).

Таква „копија“ ($y \in B$) се нема гдје вратити, па релацију уназад не можемо дефинисати као функцију!

На графу лијево то је број 3.

Други случај, када функција није инјекција („1-1“ пресликавање), онда је бар један елеменат кодомена ($2 \in B$) бар двострука слика оригинала ($b, c \in A$). Тада опет, враћање назад јесте нека релација из $B \times A$, али није функција.

Зато (теорем 4.1.6), инверзну функцију имају једино обострано једнозначна пресликавања, тзв. бијекције.

Дефиниција 4.2.1 Нека су X и Y непразни скупови и $f : X \to Y$. Ако је $S \subseteq X$, тада $f(S)$ представља скуп $\{f(x) \mid x \in S\}$ који се назива **слика** S под f.

На претходном графу $A = \{a, b, c\}$ и $f(A) = \{1, 2\}$.

Теорем 4.2.2 Функција f је бијекција ако и само ако $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, за све непразне подскупове A и B из домена D.

Доказ: Претпоставимо да је f бијекција. Нека су A и B непразни подкупови из D. Нека $y \in f(A \cap B)$. Тада је $y = f(x)$ за неко $x \in A \cap B$. Зато $y \in f(A) \cap f(B)$. Тако видимо

$f(A\cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Сада, нека је $y \in f(A) \cap f(B)$. Тада је $y \in f(A)$ и $y \in f(B)$. Зато, $y = f(a)$ за неко $a \in A$, и $y = f(b)$ за неко $b \in B$. Како је функција бијекција и $f(a) = f(b)$, слиједи $a = b$. Према томе, $y \in f(A\cap B)$. Тако видимо $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A\cap B)$. Посљедица тога је $f(A\cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Обратно, претпоставимо да је $f(A\cap B) = f(A) \cap f(B)$ за све подскупове из D. Претпоставимо да функција није бијекција. Према томе, постоје $x, y \in D$ такви да је $f(x) = f(y)$ и $x \neq y$. Нека $A = \{x\}$ и $B = \{y\}$. Како $A\cap B = \varnothing$, $f(A\cap B) = \varnothing$. Међутим, $f(A) \cap f(B) = \{f(x)\} \neq \varnothing$. Добили смо $f(A\cap B) \neq f(A) \cap f(B)$, контрадикцију. Отуда, функција је бијекција. ♦

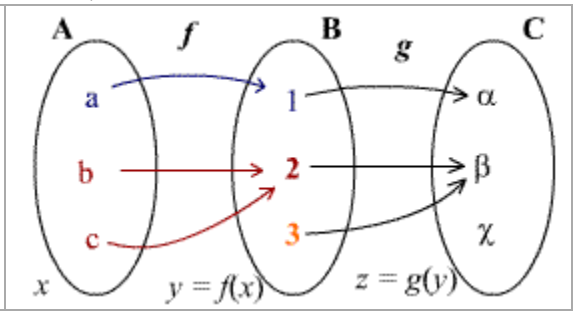
4.3 Композиција функција

Нека су дате двије функције $f : A \to B$ и $g : B \to C$, као на слици доле.

Тада се може дефинисати композиција функција $h : A \to C$, на начин

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Примјетимо да на аргумент композиције дјелује прво ближа функција, овдје g.



На датој слици добијамо редом:

$$h(a) = (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(1) = \alpha,$$
$$h(b) = (g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(2) = \beta,$$
$$h(c) = (g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(2) = \beta.$$

Примјер 4.3.1 Дате су функције $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Наћи функције а) $f \circ g$; б) $g \circ f$; в) $f^2 = f \circ f$; г) g^2.

Рјешење за а) и б) дајемо прегледно у табели:

$f \circ g$	$g \circ f$
$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3) = 4$	$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = 1$
$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(1) = 2$	$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(3) = 4$
$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(4) = 1$	$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(4) = 2$
$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(2) = 3$	$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(1) = 3$

Отуда а) $f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; в) $f^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Примјетимо да композиција функција није комутативна. Иначе, увијек је композиција бијекција бијекција.

Примјер 4.3.2 Дате су функције $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 2x - 3$, $h(x) = 3x - 1$, на скупу реалних бројева ($x \in \mathbf{R}$). а) Провјерити закон асоцијације за композицију функција, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. б) Наћи композицију $f \circ g \circ h$.

Рјешење: а) Слиједи из општих једнакости $[f \circ (g \circ h)](x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$ и $[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$. б) $f(g(h(x))) = f(g(3x - 1)) = f(2(3x - 1) - 3) = 2(2(3x - 1) - 3) + 1 = 12x - 9$.

4.4 Задаци

4.4.1 Која од сљедећих функција $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ је сирјекција, односно инјекција:

а) $f(x) = 2x^2 - x + 1$; b) $f(x) = x^3 + 2x$; c) $f(x) = |x| - 3x + 2$; d) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$.

4.4.2 Нека је $A = \{1, 2, 3\}$.
а) Написати све сирјекције из A у A.
b) Написати све бијекције из A у A.

4.4.3 Рјешити функционалну једначину, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

а) $f(\dfrac{x-1}{x+2}) = \dfrac{2x-1}{3x+2}$; b) $f(\dfrac{x+1}{x-2}) = \dfrac{3x-2}{2x+3}$; c) $f(\dfrac{x-2}{x+1}) = \dfrac{2x-3}{3x-2}$;

d) $2f(x) - f(\dfrac{1}{x}) = 3x$; e) $3f(x) + 2f(\dfrac{1}{x}) = \dfrac{1}{x}$; f) $f(x) - 3f(\dfrac{1}{x}) = x^2$.

Рјешење: а) Смјена $\dfrac{x-1}{x+2} = t$ даје $x = \dfrac{1+2t}{1-t}$, затим $f(t) = \dfrac{2 \cdot \dfrac{1+2t}{1-t} - 1}{3 \cdot \dfrac{1+2t}{1-t} + 2} = \dfrac{1+5t}{5+4t}$, а отуда $f(x) = \dfrac{1+5x}{5+4x}$. d) Ставимо $x = t$, добићемо прву једначину $2f(t) - f(\dfrac{1}{t}) = 3t$; ставимо затим $x = 1/t$, добићемо другу једначину $2f(\dfrac{1}{t}) - f(t) = \dfrac{3}{t}$. То је линеарни систем једначина $2u - v = 3t$ и $2v - u = \dfrac{3}{t}$, гдје је $u = f(t)$, $v = f(\dfrac{1}{t})$ и гдје је t параметар. Отуда $u = 2t + \dfrac{1}{t}$, па је $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$.

4.4.4 Дата је $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.
а) Наћи функције f^2, g^3 и h^3 ; шта им је заједничко?
b) Пронаћи непознате функције u и v, из једнакости $f \circ u = h$ и $v \circ g = h$.
c) Провјерити једнакост $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

4.4.5 Дато је $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ и $A, B \subseteq \mathbf{X}$. Доказати да је:
а) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;
c) $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$, ако је функција бијекција.

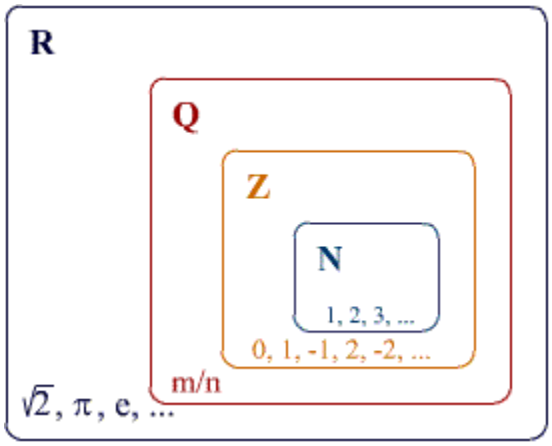
4.4.6 Дато је $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, и $S \subseteq \mathbf{Y}$ гдје $f^{-1}(S) = \{x \in \mathbf{X} \mid f(x) \in S\}$. Нека је $A, B \subseteq \mathbf{Y}$. Доказати:
a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;
b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;
c) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

4.4.7 Еквивалентни скупови A, B су они између којих постоји бијекција $f : A \to B$. Тада пишемо $A \sim B$, или $|A| = |B|$. Показати да су еквивалентни:
a) Скуп парних и свих природних бројева;
b) Скуп цијелих и природних бројева, тј. $\mathbf{Z} \sim \mathbf{N}$;
c) Скуп рационалних и природних бројева, тј. $\mathbf{Q} \sim \mathbf{N}$;
d) Скуп свих реалних бројева и интервал од -1 до 1, тј. $\mathbf{R} \sim (-1, 1)$.

Рјешење: d) На примјер, функција $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ је бијекција са **R** на (-1, 1).

II Бројеви

Бројеви су основа, или су бар извор многих примјера у различитим областима математике.



Овдје је најшири скуп реалних бројева: реални бројеви (**R**), чији су један дио ирационални бројеви (**I**), а други дио су разломци, тј. рационални бројеви (**Q**).

Посебан подскуп рационалних бројева су цијели бројеви (**Z**), чији подскуп су природни бројеви (**N**).

Ми се овдје нећемо бавити аксиоматским развојем теорије бројева.

5. Цијели бројеви

Када се поред скупа природних бројева **N** = {1, 2, 3, 4, … } допише скуп цијелих бројева у облику **Z** = {0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, … }, јасно је да постоји бијекција

$$f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z},$$

односно пребројавање. Зато кажемо да су ова два скупа еквивалентни, или да имају једнако (бесконачно) много елемената. Пишемо

$$\mathbf{N} \sim \mathbf{Z}, \text{ или } kard\ \mathbf{N} = kard\ \mathbf{Z}, \text{ односно } |\mathbf{N}| = |\mathbf{Z}| = \aleph_0.$$

Ознака $\aleph_0$ – алеф нула, означава „количину“ природних бројева, односно уопште бесконачан број елемената неког „пребројивог“ скупа.

5.1 Математичка индукција

Принцип доброг уређења 5.1.1: Сваки непразан потскуп скупа ненегативних цијелих бројева ($\mathbf{Z}^{\#}$) има најмањи елеменат, тј. ако $\emptyset \neq S \subseteq \mathbf{Z}^{\#}$, тада постоји $x \in S$ такав да је $x \leq y$ за сваки $y \in S$. Посебно, скуп природних бројева је такав подскуп.

Принцип математичке индукције 5.1.2: Нека је $S \subseteq \mathbf{Z}^{\#}$, и нека је најмањи број $n_o \in S$. Претпоставимо да S задовољава било који од сљедећих услова:

1. за свако $n \geq n_o$, $n \in \mathbf{Z}^{\#}$, ако $n \in S$ тада $n + 1 \in S$;
2. за свако $n_o \leq m < n$, $n \in \mathbf{Z}^{\#}$, ако $m \in S$ тада $n \in S$.

Tada je $\{n \in \mathbf{Z}^{\#} \mid n \geq n_o\} \subseteq S$.

Примјер 5.1.3 Помоћу математичке индукције доказаћемо формулу за збир првих n природних бројева: $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$. То је позната формула збира најједноставнијег аритметичког низа бројева.

Да бисмо боље разумјели о чему се ради, тестирамо формулу за $n = 1$. На лијевој страни једнакости је једини сабирак 1, па је и збир 1, а на десној страни имамо разломак $\frac{1\cdot(1+1)}{2}$, тј. такође 1. Тачно! Даље, тестирамо формулу, рецимо за $n = 4$. Сада имамо $1+2+3+4=\frac{4\cdot(4+1)}{2}$, што је тачно јер је збир лијеве стране једнакости 10, а то је и вриједност разломка десно. Тестирајте формулу за још неки природан број! Међутим, ово је било набрајање тачних случајева, али није и доказ.

Доказ помоћу принципа математичке индукције треба још један корак. То је доказ импликације $(\forall n \geq n_o)\ S(n) \Rightarrow S(n+1)$, што овдје значи:

ако је тачна претпоставка $S(n): 1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ онда је тачна

посљедица $S(n+1): 1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Лијева страна једнакости $S(n+1)$ садржи лијеву страну једнакости $S(n)$ плус сљедећи сабирак у низу $(n+1)$. То је збир $\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$, који сређивањем даје $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, дакле десну страну посљедице. Према томе, користећи претпоставку извели смо посљедицу, што значи да смо доказали импликацију. Према принципу математичке индукције, доказали смо дату формулу.

Примјер 5.1.4 Доказаћемо да је $(\forall n \geq 3)\ 2n + 1 \leq 2^n$.

Први корак доказа математичком индукцијом је прва из низа провјера:
Ако је $n = 3$, имамо $2\cdot3 + 1 \leq 2^3$, што је тачно, јер је $7 \leq 8$.
Ако је $n = 4$, имамо $2\cdot4 + 1 \leq 2^4$, што је тачно, јер је $9 \leq 16$.
Ако је $n = 5$, имамо $2\cdot5 + 1 \leq 2^5$, што је тачно, јер је $11 \leq 32$.

Други корак је доказ импликације $(\forall n \geq n_o = 3)\ S(n) \Rightarrow S(n+1)$, односно:
Ако је тачно $S(n): 2n + 1 \leq 2^n$, онда је тачно $S(n + 1): 2(n+1)+ 1 \leq 2^{n+1}$. Зато ћемо извести посљедицу $S(n+1)$ користећи претпоставку $S(n)$. Имамо редом

$2(n+1)+ 1 = 2n + 2 + 1 = (2n + 1) +2$
$\leq 2^n + 2$, јер је $S(n)$ тачно
$\leq 2^n +2^n$, јер $n \geq 3$ и $2 \leq 2^n$
$= 2^{n+1}$, дакле $S(n+1)$ је тачно.

Према принципу математичке индукције, $2n + 1 \leq 2^n$ је тачно за свако $n \geq 3$.

Примјери 5.1.5 Методом математичке индукције доказати да је за све природне бројеве $n \in \{1,2,3,...\}$ тачна једнакост:

а) $3^{2n+1} + (-1)^n 2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 5)$, тј. израз на лијевој страни је дјељив са 5;

б) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

в) $7^n - 1$ је дјељиво са 6;

г) $n < 2^n$.

5.2 Дјељивост

Правила (критеријуми) дјељивости 5.2.1.
Број је дјељив са 2 када је задња цифра броја дјељива са 2, када је она парна. Број је дјељив са 4 када су задње двије цифре дјељиве са 4. Број је дјељив са 8 када су задње три цифре дјељиве са 8. Уопште, број је дјељив са 2^n када је задњих $n \in \mathbf{N}$ цифара дјељиво са 2^n.

Број је дјељив са 3 када је збир цифара броја дјељив са 3. Број је дјељив са 9 када је збир цифара броја дјељив са 9. На примјер, број 69993 дјељив је са 9 јер је збир цифара броја 6+9+9+9+3 дјељив са 9. Уопште, број је дјељив са 3^n када је збир цифара броја дјељив са 3^n.

Број је дјељив са 5 када је задња цифра броја дјељива са 5. Број је дјељив са 25 када задње двије цифре чине број који је дјељив са 25. На примјер, број 123...975 дјељив је са 25, јер је 75 дјељиво са 25. Уопште, број је дјељив са 5^n када задњих n цифара чини број дјељив са 5^n.

Број је дјељив са 7 када двострука посљедња цифра одузета од претходног дијела броја даје број дјељив са 7. На примјер, број 203 је дјељив са 7 јер 20 – 2·3 = 14, а 14 је дјељиво са 7.

Број је дјељив са 11 ако је разлика збира цифара на парним и непарним мјестима броја дјељива са 11. На примјер, број 1 358 024 679 је дјељив са 11 јер је разлика збирова (3+8+2+6+9) – (1+5+0+4+7) = 28 – 17 = 11 дјељива са 11.

Број је дјељив са 13 када деветострука посљедња цифра одузета од претходног дијела броја даје број дијељив са 13. На примјер, број 351 је дјељив са 13 јер 35 – 9·1 = 26, а 26 је дјељиво са 13.

Нека од ових правила се уче у нашим основним школама. Међутим, постоје и друга. Рецимо, према правилима тзв. **ведске математике** број је дјељив са 4 ако његова посљедња цифра додата двострукој претпосљедњој даје број дјељив са 4. На примјер, 57575746 није дјељив са 4 јер $6 + 2 \cdot 4 = 14$ није дјељиво са 4, али број 57575736 јесте дјељив са 4 јер $6 + 2 \cdot 3 = 12$ јесте.

Примјер 5.2.2. Превести дати број из декадног у систем базе n и назад.

а) 23 у бинарни систем; **б)** 47 у систем базе 3; **в)** 56, $n = 7$; **г)** 98, $n = 12$. Цифре, замјене за бројеве 10, 11, 12, ... су A, B, C, … .

Рјешење: а) Дјелимо број 23 са 2 и запишимо остатке у колону коју затим пишемо уназад. Обратно, од задње цифре ка првој поредајмо степене броја 2 помножене са одговарајућим цифрама. Имамо $23 = 11001_2$. База 10 се подразумјева.

23 : 2 = 12	1
12 : 2 = 6	0
6 : 2 = 3	0
3 : 2 = 1	1
1 : 2 = 0	1

$$11001_2 = 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 16 + 8 + 0 + 0 + 1 = 23$$

Теорем 5.2.3. (Алгоритам дјељења). Нека су $x, y \in \mathbf{Z}$ гдје је $y \neq 0$. Онда постоје јединствени цијели бројеви q и r такви да $x = qy + r$, гдје $0 \leq r < |y|$.

На примјер, за цијеле бројеве $7, 3 \in \mathbf{Z}$ биће $7 = 2\cdot 3 + 1$, па кажемо да је 7 дјељеник, 2 количник, 3 дјелилац, а 1 је остатак дјељења. Теорем тврди да за свака два цијела броја, осим када је дјелилац нула, постоје јединствени количник и остатак.

Доказ. Прво претпоставимо $y > 0$. Тада је $y \geq 1$. Размотримо непразан скуп ненегативних цијелих бројева $S = \{x - uy \mid u \in \mathbf{Z}, x - uy \geq 0\}$. Према принципу доброг уређења (5.1.1) овај скуп мора имати најмањи елеменат $r \in S$ такав да је $r = x - qy$ за неко $q \in \mathbf{Z}$. Тада је $x = qy + r$. Доказали смо егзистенцију.

Бројеви из скупа S су ненегативни, па је $0 \leq r$, а доказаћемо да је $r < |y|$. Претпоставимо супротно, прво да је $r \geq |y| = y$. Тада $x - (q+1)y = (x - qy) - y = r - y \geq 0$. Према томе је $r - y \in S$, а то је контрадикција јер је r најмањи ненегативан цијели број у S . Ако је $r \geq |y| = -y$, тј. ако је y негативан број, тада постоје цијели бројеви p и r такви да је $x = p\cdot|y| + r$, $0 \leq r < |y|$, према претходном резоновању. Отуда је $x = p\cdot y + r$, па ако ставимо $q = -p$ добијамо $x = qy + r$, гдје $0 \leq r < |y|$, дакле тражено тврђење. Доказали смо неједнакости.

Преостало је да докажемо јединственост бројева q и r . Претпоставимо да постоје бројеви q' и r' такви да је $x = qy + r = q'y + r'$, а оба $0 \leq r$, $r' < |y|$. Тада је $r - r' = (q - q')y$. Тако је је $|r - r'| = |q - q'||y|$. Додајући услове добијамо $-|y| < r - r' < |y|$, односно $|r' - r| < |y|$. Према томе је $0 \leq |q - q'| < 1$. Како је $q - q'$ цијели број, то мора бити нула, а отуда $|r' - r| = 0$. Дакле, $q - q' = 0$ и $r' - r = 0$, тј. $q = q'$ и $r' = r$. Доказали смо да су бројеви q и r једнистени. ♦

Посљедица 5.2.4 За било која два цијела броја x и y , при чему је $y > 0$, постоје јединствени цијели бројеви q и r такви да $x = qy + r$, гдје $0 \leq r < y$.

Наиме, према претходном теорему постоје јединствени бројеви q и r такви да $x = qy + r$, гдје $0 \leq r < |y|$. Како је $|y| = y$, биће $x = qy + r$, гдје $0 \leq r < y$. ♦

Највећи заједнички дјелилац (*nzd*) цијелих бројева x и y је природни број d који има сљедеће двије особине:

1. $d \mid x \ \wedge \ d \mid y$ (d дијели x и d дијели y, тј. оба x, y су дијељиви са d);
2. $(\forall c \in \mathbf{Z})\ c|x \wedge c|y \Rightarrow c|d$.

Теорем 5.2.5 Нека су x, y два цијела броја од којих је бар један различит од нуле. Тада постоји њихов највећи заједнички дјелилац, природни број d. Штавише, постоје два цијела броја m, n таква да је $d = m \cdot x + n \cdot y$.

Примјер 5.2.6 За дате парове цијелих бројева x, y наћи њихов *nzd*, природни број d, и пар цијелих бројева m, n таквих да је $d = m \cdot x + n \cdot y$:
а) x, y = 45, 126; **б)** 70, 154; **ц)** 132, 156; **д)** 143, 165.

Рјешења а) *nzd*(45, 126) = 9 јер:

прво имамо	затим
$126 = 2 \cdot 45 + 36$	$9 = 45 - 1 \cdot 36$
$45 = 1 \cdot 36 + 9$	$= 45 - 1 \cdot (126 - 2 \cdot 45)$
$36 = 4 \cdot 9 + 0,$	$= 3 \cdot 45 + (-1) \cdot 126.$

б) d = 14, јер разломак 70/154 можемо скратити прво са 2, а затим са 7; једнакост $14 = m \cdot 70 + n \cdot 154$ скратимо са 14, затим налазимо m = -2, n = 1; **ц)** d = 12, m = 6, n = -5; **д)** 11, 7, -6.

Прост, или прим број p је природан број чији једини дјелиоци су ± 1 и $\pm p$.

Узајамно прости, односно релативно прости бројеви a и b су они цијели бројеви чији највећи заједнички дјелилац је број 1, тј. $nzd(a, b) = 1$.

Примјер 5.2.7 Нека су a и b цијели бројеви различити од нуле. Доказати да су тада a и b узајамно прости ако и само ако постоје $m, n \in \mathbf{Z}$ такви да је $ma + nb = 1$.

Доказ. Нека су a и b узајамно прости. Тада је $nzd(a, b) = 1$. Према теореми 5.2.3 тада постоје цијели бројеви m и n такви да је $ma + nb = 1$.
Обрнуто, претпоставимо да је $ma + nb = 1$ за неки пар цијелих бројева m и n. Нека је $d = nzd(a, b)$. Тада d дијели a и b, тј. $d|a$ и $d|b$ па према томе $d|(ma + nb)$, што значи $d|1$, те је $d = 1$.♦

Примјер 5.2.8 Дати су $a, b, c \in \mathbf{Z}$ гдје $a \neq 0$. Доказати, ако $a|bc$ и a, b су узајамно прости, тада $a|c$.

Доказ. Како су a, b узајамно прости, постоје $m, n \in \mathbf{Z}$ такви да је $ma + nb = 1$. Отуда $mac + nbc = c$. Из претпоставке $a|bc$ и из $a|a$ слиједи $a|(mac + nbc)$ и према томе $a|c$.♦

Примјер 5.2.9 Дати су $a, b, p \in \mathbf{Z}$ гдје је p прост број. Ако $p|ab$ тада или $p|a$ или $p|b$.

Доказ. Ако $p|a$ тада имамо тражени резултат. Претпоставимо да p не дијели a. Како је p прост број, то су p и a узајамно прости. Онда и према претходном примјеру $p|b$.♦

Примјер 5.2.10 Нека a_1 , a_2 , a_3 , …, a_n , $p \in \mathbf{Z}$ гдје је p прост број. Ако је

$$p|\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$$

тада је $p|a_i$ за неке i, $1 \le i \le n$.

Доказ слиједи индукцијом из претходног примјера.♦

Број 54 има факторе $2 \cdot 3^3$. Слично, број 496125 је производ $3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2$. Сљедећи теорем тврди да је тако могуће написати сваки цијели број.

Теорем 5.2.11 (Основни теорем аритметике) Сваки цијели број $k > 1$ има јединствен растав на факторе

$$k = p_1^{c_1} \cdot p_2^{c_2} \cdots p_n^{c_n},$$

гдје су p_1 , p_2 ,…, p_n различити прости бројеви, а c_1 , c_2 ,…, c_n су природни бројеви.

Теорем 5.2.12 (Еуклидов) Бесконачно је много простих бројева.

Доказ. Рецимо да је p_1 , p_2 ,…, p_n коначан број простих бројева. Нека је $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Како p_i не дијели 1 онда он не дијели x, за свако $i = 1, 2, \ldots, n$. Према основном теорему аритметике, мора бити неки прост број p такав да $p|x$. Према томе, постоји $n + 1$ прост број. Дакле, за било који дати коначан скуп простих бројева ми можемо наћи један више, што значи да простих бројева има бесконачно много.♦

Ојлерова $\phi(n)$ функција је број природних бројева не већих од n који су са n узајамно прости, тј. $\phi(n) = kard\{m \in \mathrm{N} \mid m \le n \wedge nzd(m,n) = 1\}$.

На примјер, $\phi(2) = 1$, $\phi(3) = 2$, $\phi(4) = 2$, $\phi(12) = 4$.

Примјери 5.2.13

1) Доказати да је за сваки природни број n, са 6 је дјељив број:

а) број $n^3 - n$;

б) број $n^3 - 7n$;

в) број $n^3 + 11n$.

2) Доказати да за свако $n \in \mathrm{N}$ сви бројеви:

а) $n^5 - n$ су дјељиви са 5;

б) $(n-1)(2n+5)(7n-6)$ су дјељиви са 6;

в) $n^7 - n$ су дјељиви са 7.

3) Доказати да за сваки природни број n број A није дјељив бројем B:
а) $A = n^2 + 3n + 5$, $B = n + 2$;
б) $A = n^2 - 6n + 8$, $B = n - 3$;
в) $A = n^2 + 8n + 15$, $B = n + 4$.

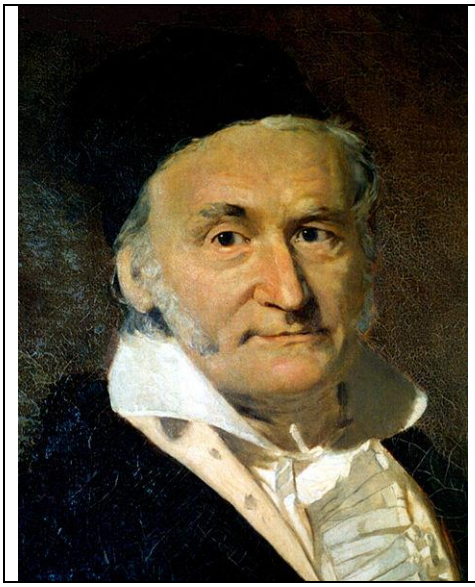
Рјешења
1) а) и б) раставите на факторе, на три, односно на пет узастопних бројева, а производ пет узастопних бројева је дјељив са сваким од бројева 2, 3, 4, 5, тј. дјељив је са њиховим производом; в) раставите на збир два броја дјељива са 6.

2) а) број $f(n)$ је дјељив са 5 ако и само ако је дјељив са сваким од бројева у класама $n = 5k$, $n = 5k+1$, $n = 5k+2$, $n = 5k+3$ и $n = 5k+4$, $\forall k \in \mathrm{N}$, и раставити дати израз на факторе $n(n-1)(n+1)(n^2+1)$; б) иста примједба, са 6 класа према остацима дјељења; в) исто и $n(n-1)(n+1)(n^2-n+1)(n^2+n+1)$.

3) Слиједи из једнакости а) $n^2 + 4n + 5 = (n+2)^2 + 1$, в) $n^2 + 8n + 15 = (n+4)^2 - 1$ итд.

5.3 Конгруенције

Дефиниција 5.3.1 Ако за цијеле бројеве a и b и природан број n вриједи да n дијели $a - b$ тада пишемо $a \equiv b \pmod{n}$ и читамо „a је конгруентно b по модулу n“.



Велики њемачки математичар **Карл Фридрих Гаус** (1777 - 1855) је 1801. у својој 24. години написао фундаменталну књигу „*Disquisitiones Arithmeticae*“, гдје је увео појам конгруенције, чије је означавање задржано до данас.

Гаус је радио у многим подручјима математике и физике, укључујући теорију бројева, анализу, диференцијалну геометрију, геодезију, магнетизам, астрономију и оптику. Његов рад је имао огроман утицај у многим областима.

Једном приликом је Гаус рекао: математика је краљица наука, а теорија бројева је краљица математике.

Примјери 5.3.2
Знамо да запис $n \mid (a-b)$, тј. n дијели $a - b$ значи исто што $a - b = m \cdot n$, $m \in \mathbf{Z}$.
Лако је провјерити да је тачно тврђење: $a \equiv a + m \cdot n \pmod{n}$, за свако $m \in \mathbf{Z}$.

Ако је a је конгруентно b по модулу n онда a и b имају исте остатке након дјељења са n, прецизније $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n \mid (a-b)$.
Конгуренције можемо писати и овако: $51 \equiv 46 \equiv 36 \equiv 21 \equiv 1 \pmod{5}$.

Задаци 5.3.3

1) Провјерити тачност конгруенција:

а) $34 \equiv 28 \pmod{3}$, јер је 34 – 28 = 2·3;

б) $7 \equiv -1 \pmod{4}$, јер је $7 + 1 = 8 = 2 \cdot 4$;

в) $-19 \equiv -4 \pmod{5}$, јер је $-19 - (-4) = (-3) \cdot 5$;

г) $23 \equiv 0 \pmod{23}$, јер је $23 - 0 = 1 \cdot 23$.

2) Доказати да за све цијеле бројеве a, b, c и за природан број n вриједи:

Рефлексивност: $a \equiv a \pmod{n}$;

Симетричност: $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow b \equiv a \pmod{n}$;

Транзитивност: $a \equiv b \pmod{n} \wedge b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$.

Доказ р. $a - a = 0 = 0 \cdot n$;

с. $a - b = m \cdot n \Leftrightarrow b - a = (-m) \cdot n$;

т. $a - b = m_1 \cdot n \wedge b - c = m_2 \cdot n \Rightarrow a - c = (m_1 + m_2) \cdot n$. ♦

3) Доказати да из $a \equiv b \pmod{n}$ и $c \equiv d \pmod{n}$ слиједи:

1. $a + c \equiv b + d \pmod{n}$;

2. $a - c \equiv b - d \pmod{n}$;

3. $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{n}$;

4. $a^m \equiv b^m \pmod{n}$, $\forall m \in \mathrm{N}$;

5. $ka \equiv kb \pmod{n}$, $\forall k \in \mathrm{Z}$.

Доказ 1. и 2. $a - b = m_1 \cdot n$ и $c - d = m_2 \cdot n \Rightarrow (a \pm c) - (b \pm d) = (m_1 \pm m_2) \cdot n$;

3. $(m_1 \cdot m_2) \cdot n^2 = (a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd =$

$= ac - bd + bd - ad + bd =$

$= ac - bd - b(c - d) - d(a - b) =$

$= ac - bd - (b \cdot m_1) \cdot n - (d \cdot m_2) \cdot n$

$\Rightarrow ac - bd = ((m_1 \cdot m_2) \cdot n + b \cdot m_1 + d \cdot m_2) \cdot n$.

4. и 5. Сљеде директно из 3. прва вишеструким множењем исте конгруенције, а друга за $b = c = k$. ♦

4) Колики је остатак дјељења броја $\left(7^{1980}\right)^{1990} - \left(3^{80}\right)^{90}$ бројем 10?

Рјешење Користимо став 4. задатка 3. Из $7^2 = 49 = 50 - 1 \equiv -1 \pmod{10}$ слиједи $7^4 = (7^2)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{10}$ и слично, из $3^2 = 9 = 10 - 1 \equiv \pmod{10}$, тј. $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$.
Са друге стране 4|1980 и 4|80, па имамо $\left(7^{1980}\right)^{1990} - \left(3^{80}\right)^{90} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{10}$. ♦

5) Одредити остатке при дјељењу бројева:
а) 3^{100} са 13; **б)** 11^{36} са 13; **в)** 6^{2010} са 7; **г)** 3^{2011} са 11.

Резултати а) резултат је 3, јер $3^3 = 27 = 2\cdot 13 + 1$, тј. $3^3 \equiv 1 (\mathrm{mod} 13)$, па према задатку 3. слиједи степеновање са 33, те $3^{99} \equiv 1 (\mathrm{mod} 13)$, затим множимо са 3; б) 1; в) 1; г) $3\cdot\left(3^5\right)^{402} \equiv 3 \pmod{11}$.

6. Разломци

У ужем смислу разломак је број који представља дио цјелине, на примјер половина, трећина, четири седмине, итд. У ширем смислу разломак је број добијен дјељењем цијелих бројева. Скуп разломака, рационалних бројева означавамо са **Q** и дефинишемо прецизно:

$$\mathbf{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbf{Z} \wedge n \in \mathbf{N}\}.$$

Елементе овог скупа називамо разломци, или рационални бројеви.

6.1. Аритметика

Подсјетимо се да су сви периодични децимални бројеви рационални.

Примјер 6.1.1. Сљедеће периодичне децималне бројеве представити разломцима:
а) 0,333... **б)** 0,272727...
б) 3,121212... **г)** 12,0131313...
Рјешења: а) Уведимо ознаку $x = 0{,}333...$ да након множења са 10 добијемо $10x = 3{,}333...$, што значи да је $10x = 3 + x$, односно $9x = 3$, па је $x = \frac{3}{9}$, односно дати број је трећина; **б**) сличан поступак и множење са 100 дају резултат 3/11; **в**) $3 + \frac{4}{33}$; **г**) $12 + \frac{13}{990}$.

Једну петину, двије петине, ... пишемо као разломке редом $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, ... Доњи дио разломка, испод разломачке линије (црте) називамо називник (именилац), а горњи бројник (бројилац) разломка.

Када је бројник природан број мањи од називника, тада кажемо да имамо прави разломак. Када бројник и називник разломка помножимо, или подјелимо истим бројем, који није нула тада разломак не мјења вриједност, а операцију називамо проширивање, односно скраћивање разломка. Разломак је редукован, тј. скраћен када су бројник и називник узајамно прости бројеви.

Неправи разломак можемо писати у облику збира цијелог броја и правог разломка, на примјер $\frac{3}{2} = \frac{2+1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$, или $-\frac{6}{4} = -1 - \frac{2}{4}$. Примјетите, ако почетни и завршни

разломак имају једнаке називнике (нису скраћивани) онда су почетни неправи разломак и завршни прави разломак једнако редуковани, односно нередуковани.

Примјер 6.1.2. Који је то дати разломак.
а) Називник броја је за три већи од бројника. Када бројнику и називнику додамо по један добићемо половину.
б) Када бројнику и називнику датог разломка одузмемо по три добићемо трећину, а када одузмемо још по три добићемо деветину.
в) Збир и разлика бројника и називника неправог разломка су редом 25 и 2.
г) Збир квадрата бројника и називника негативног разломка је 25.

Рјешења: а) 2/5; б) 7/15; в) 13/11; г) -3/4, или -4/3.

Примјер 6.1.3.
а) Скратити разломке $\frac{17^2-5^2}{17^3+5^3}$, $\frac{5^4-4^4}{5^4+2\cdot 20^2+4^2}$, $\frac{5^6-3^6}{5^4+5^2\cdot 3^2+3^4}$.

б) Доказати да су сљедећи разломци редуковани за сваки цијели број n:
i. $\frac{2n+3}{5n+7}$; **ii.** $\frac{21n+4}{14n+3}$; **iii)** $\frac{3n+4}{4n+5}$.

Рјешења: **а)** 12/229; 1/9; 16; **б) i.** претпоставимо супротно, да постоји цијели бројеви a, b и цијели број $k > 1$ такав да је $2n + 3 = ak$, $5n + 7 = bk$. Множењем прве једнакости са 5 и друге са 2 па одузимањем слиједи $1 = 5ak – 2bk$, тј. цијели бројеви k и $5a – 2b$ су фактори јединице, што је немогуће. **ii.** Разломак се може писати у облику $1+\frac{7n+1}{14n+3}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{7n+1}}$. Разломак у називнику је редукован, називник је редукован, па је и почетни разломак редукован.

Примјер 6.1.4. Сабрати разломке
а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{99\cdot 100}$; **б)** $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}$.

Рјешења: а) $=\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+...+\frac{100-99}{99\cdot 100}$
$=\left(\frac{2}{1\cdot 2}-\frac{1}{1\cdot 2}\right)+\left(\frac{3}{2\cdot 3}-\frac{2}{2\cdot 3}\right)+...+\left(\frac{100}{99\cdot 100}-\frac{99}{99\cdot 100}\right)$
$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$; **б)** $\frac{32}{1-a^{32}}$, сабирајте по реду два по два разломка.

Пребројавање је, према оснивачима теорије скупова, обострано једнозначно придруживање (бијекција) елемената датог скупа редом елементима скупа

природних бројева: 1, 2, 3, ... Према томе је **пребројив скуп** такав за који постоји бијекција на скуп природних бројева.

Лако је провјерити да је скуп цијелих бројева пребројив, када се његови елементи поредају: 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... Скуп разломака такође је пребројив, али скуп ирационалних бројева непребројив. Према томе, непребројиви су скуп реалних бројева, или скуп тачака реалне осе (апсцисе). Реалних бројева има једнако као тачака на правој – континуум много.

Примјер 6.1.5. Доказати да је скуп рационалних бројева (разломака) пребројив.

Упутство: Поредајте разломке у 2-дим. матрицу гдје се рецимо дуж колона мјења називник, а дуж редака бројник разломака свих цијелих бројева. Затим по дијагоналама редом избацујте оне вриједности које се понављају. Оно што остаје је тражени низ.

6.2. Пропорције

Пропорција је једнакост два разломка. Другим ријечима, пропорција је једнакост двију **размјера**. Ово можемо писати:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ \text{или}\ \ a:b=c:d\,.$$

Када су два односа једнака, тада је **унакрсни производ** тих односа једнак:

$$a\cdot d=b\cdot c\,.$$

На примјер, $\frac{2}{3}=\frac{14}{21}$ једнако је тачно као и $2\cdot 21=3\cdot 14$, тј. 42 = 42.

Примјер 6.2.1. Наћи *x* из пропорција:

а) $\frac{5}{3}=\frac{x}{15}$; **б)** $\frac{x-7}{x+5}=\frac{2}{3}$;

в) $\frac{x-3}{x+4}=\frac{x+1}{x+9}$; **г)** $\frac{x+5}{x+7}=\frac{x-6}{x-3}$.

Рјешење: а) 25; **б)** 31; **в)** 31; **г)** -27.

Примјер 6.2.2. Доказати да је пропорција $a:b=c:d$ еквивалентна са:

а) $(a+b):b=(c+d):d$; **б)** $(a-b):b=(c-d):d$;

в) $(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$; **г)** $(2a+3b):(4a-5b)=(2c+3d):(4c-5d)$.

Примјер 6.2.3. Ако је $\frac{a}{u}=\frac{b}{v}=\frac{c}{w}=5$ израчунати:

а) $\frac{2a-3b+4c}{2u-3v+4w}$; **б)** $\frac{a^2+2b^2-3c^2}{u^2+2v^2-3w^2}$.

Резултат: а) 5; **б)** 25.

Продужена пропорција $a:b:c=u:v:w$ се може разумјети као краћи запис три или више размјера, у датом случају сљедећих $\frac{a}{u}=\frac{b}{v}=\frac{c}{w}=k$.

Примјер 6.2.4. Наћи непознате *x* и *y*:
а) $x:y:6=y:7:2$;
б) $(y+x):(y-x):15=x:11:5$;
в) $\left(x^2+y^2\right):\left(x^2-y^2\right):10=(x+y):(x-y):2$;
г) $\left(x^3-y^3\right):\left(x+y\right):x=y:3:2$.

Резултат: а) 63, 21; **б)** 33, 66; **в)** (0, 5), или (5, 0); **г)** 2/7, 1/7.

Примјер 6.2.5. Из датих услова формирати продужену пропорцију:
а) $x:y=7:13,\ y:z=7:5$; **б)** $m:n=9:4,\ m:p=6:5$;
в) $(c-b):(c-a):(a+b)=2:3:5$; **г)** $(u+v):(u+w):(v+w)=11:10:7$.

Резултат: а) $x:y:z=49:92:35$; **б)** $m:n:p=18:8:15$; **в)** $a:b:c=2:3:5$; **г)** $u:v:w=7:4:3$.

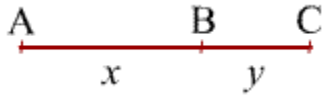
Геометријска пропорција је $m:G=G:n$ из чега слиједи $G=\sqrt{mn}$, па се овај број, корјен производа назива геометријска средина датих бројева. Иначе, бројеви $A=\frac{m+n}{2}$ и $H=\frac{2}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$ називају се аритметичка и хармонијска средина бројева *m* и *n*.

Примјер 6.2.6. Геометријска средина бројева *m* и *n*.
а) Наћи геометријску средину бројева 4 и 6.
б) Провјерити да ли је геометријска средина лијеве и десне стране пропорције једнака датој размјери.
в) Показати да су геометријска *G*, аритметичка *A* и хармонијска *H* средина два броја *m* и *n* везани једнакошћу $G=\sqrt{AH}$.
г) Доказати неједнакости $H\le G\le A$, гдје неједнакости важе ако и само ако је $m=n$.

Рјешење: а) Геометријска средина бројева 4 и 9 је број $6=\sqrt{4\cdot 9}$. **б)** То је тачно, јер из $a:b=(ka):(kb)$ слиједи $\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{ka}{kb}}=\frac{a}{b}$, тј. дата размјера. **в)** Јер је $\sqrt{AH}=\sqrt{\frac{m+n}{2}\cdot\frac{2mn}{m+n}}=\sqrt{mn}$. **г)** Слиједи из неједнакости $\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)^2\ge 0$.

Аналогно, геометријска средина три броја је трећи корјен њиховог производа, тј. $\sqrt[3]{abc}$.

Златни пресјек је подјела на два дијела тако да се цјелина према већем дијелу односи као већи дио према мањем. Према слици даље, $AC:AB=AB:AC$, односно $(x+y):x=x:y$. Ставимо ли да је други одсјечак јединичне дужине $y=1$, тј. $AC=x+1$



добијамо пропорцију $(x+1):x=x:1$, дакле квадратну једначину $x^2=x+1$.

Напишимо је $x^2-x=1$, додајмо ¼ на обе стране $x^2-x+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$, и уочимо квадрат бинома на лијевој страни $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$. Отуда рјешење $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Рјешење дате квадратне једначине је тзв. златни број $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ којему је име дао амерички математичар Марк Бар 1909. према првом слову имена античког грчког скулптора Фидијаса из око 450 г.п.н.е.

Примјер 6.2.7. Златни број $\phi=1.6180339887498948482\ldots$.

а) Показати да је верижни разломак $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$ једнак броју фи.

б) Показати да је непрекидни збир корјена $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$ број фи.

Рјешење: а) Означимо $x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$. Из бесконачности разломака видимо да $x=1+\frac{1}{x}$. Отуда „златна“ квадратна једначина $x^2=x+1$ чије рјешење је број фи. **б)** Означимо $x=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$. Након квадрирања ове једнакости, због бесконачног збира корјена препознајемо да $x^2=1+x$, тј. „златну“ квадратну једначину.

6.3. Примјене пропорција

Примјене пропорција налазимо у израчунавању просјечне брзине као количника пређеног пута и времена. Ту је брзина директно пропорционална путу, а обрнуто је пропорционална времену. Ове се форме лако поопштавају.

Друге непосредне примјене пропорција налазимо у тзв. рачуну расподјеле, рачуну мјешања, у процентном рачуну, у израчунавању камата.

Примјер 6.3.1. Директна и обрнута пропорционалност.
а) Аутомобил је прешао 126 километара за 2 часа и 20 минута. Колико времена му треба да би прешао 90 километара?
б) Четворици радника треба 6 часова да поправе цесту. За колико би времена исти посао завршило 7 радника?

Рјешење: а) Први ред на графу лијево су дати подаци, 126 км и 140 минута,

а испод су тражени, 90 км и x минута. У првој колони су пређени километри, а у другој је протекло вријеме у минутама. Вријеме вожње је директно пропорционално пређеном путу па су обе стрелице у истом смијеру.
Стелице дају и смјер пропорције $x : 140 = 90 : 126$. Рјешавањем ове пропорције добијамо $x = 100$ минута, тј. 1 час и 40 минута.
б) У првој колони на слици доле лијево су радници, у другој су часови рада.

Број радника је обрнуто пропорционалан трајању посла, па су стрелице усмјерене обрнуто. Пропорција је $x : 6 = 4 : 7$, одакле је $x = 3 + \frac{3}{7}$ часова, тј. 3 часа и мање од 26 минута.

Примјер 6.3.2.
а) 14 радника ископа неки канал за 17 дана. Послије 5 дана 6 радника напусти посао. Колико дана треба онима који су остали да заврше остатак посла?
б) Неки посао 6 радника може да заврши за 5 дана. За колико ће дана бити готов исти посао ако послије 2 дана дође још 3 радника?

Рјешење: а) 14 радника би завршило преостали посао за 12 дана, а 8 радника

ће завршити за x дана. У првој колони лијево су радници, а у другој преостали дани. То је обрнута пропорција $x : 12 = 14 : 8$, чије је рјешење $x = \frac{14}{8} \cdot 12$, тј. преостали радници радиће још 21 дан.
б) На други начин,

можемо рећи да 1 цијели посао заврши 6 радника за 5 дана, али да сада имамо 3/5 тог посла и 9 радника за x дана.
У првој колони на слици је количина посла, у другој број радника, у трећој број дана. Прва колона је директно, а друга је обрнуто пропорционална са колоном у којој је непозната x. Пишемо

$$x : 5 = 6 : 9$$
$$= 3/5 : 1,$$ а

затим формирамо $x : 5$ као разломак гдје је горе, у бројнику производ бројника, а доле, у називнику је производ називника, тј. $x : 5 = \frac{6 \cdot (3/5)}{9 \cdot 1}$. Отуда $x = 2$ дана.

Примјер 6.3.3.

а) Статистички је записано да на једној фарми једна ипо кокош за један ипо дан снесе једно ипо јаје. Колико на тој фарми просјечно јаја снесе једна кокош за један дан?
б) Даска дужине 6 метара, ширине 8 центиметара и дебљине 9 милиметара кошта 18 КМ. Колико кошта даска дужине 7 метара, ширине 6 центиметара и дебљине 8 милиметара?
в) Посуда дубине 5 м, ширине 6 м, дужине 8 м садржи течност цијене 140 КМ. Колика је цијена течности која би била у посуди дубине 6 м, ширине 5 м, дужине 7 м?

Рјешење: На три начина.
а) Како 1,5 кокошки за 1,5 дана снесу 1,5 јаја, то значи да ће тај исти број кокошију за дупло више дана сњети дупло више јаја, тј. 1,5 к за 3 д сњеће 3 ј. Даље, за исти број дана дупло више кока сњеће дупло више јаја, тј. 3 к за 3 д сњеће 6 ј. Поново, трећина кока за исти број дана сњеће трећину од тих 6 јаја, тј. 1 к за 3 д даће 2 ј. Коначно, иста кока за трећину времена сњеће трећину јаја, тј. 1 к за 1 д носи 2/3 јаја.
б) Запремина прве даске је $V_1 = 6 \cdot 8 \cdot 9$ (у јединицама метар пута центиметар пута милиметар), а друге $V_2 = 7 \cdot 6 \cdot 8$. Узимамо да је запремина дрвета директно пропорционална цијени $V_1 : V_2 = 18 : x$, па је цијена друге даске $x = \frac{7 \cdot 6 \cdot 8}{6 \cdot 8 \cdot 9} \cdot 18$, тј. $x = 14$ КМ.
в) Као на слици даље, формирамо колоне са дубином, ширином, дужином и цијеном посуде. Затим примјетимо да је цијена течности сразмјерна свакој од тих величина и поставимо стрелице у истом смијеру.

$x : 140 = 6 : 5$
$= 5 : 6$
$= 7 : 8$

Отуда $x : 140 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 7}{5 \cdot 6 \cdot 8}$, где је у бројнику производ бројника, а у називнику називника. Према томе, цијена друге текућине је $x = 160$ КМ.

Примјер 6.3.4. Рачун расподјеле.
а) Подјелити дужину 500 метара на три дијела пропорционална бројевима 2, 3 и 5.
б) Један комад ливеног гвожђа, тежине 3 килограма је легура жељеза (гвожђа) са 2% тежинских дијелова угљеника, са 1,5% силицијума и укупно још 1,5 % мангана, хрома и фосфора. Колика је тежина ових састојака?
в) Поделити 800 КМ на три лица тако да свако сљедеће добије 20% више новца.

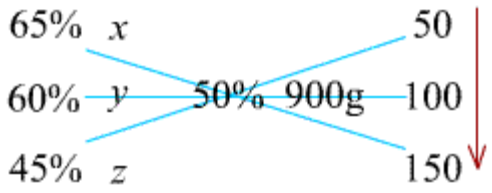
Рјешење: а) Означимо три тражене дужине x, y и z. Тада је $x + y + z = 500$ и $x : y : z = 2 : 3 : 5$. Из продужене пропорције слиједи $x = 2k$, $y = 3k$ и $z = 5k$, па је прва једначина $2k + 3k + 5k = 500$, одакле $k = 50$. Затим $x = 100$, $y = 150$ и $z = 250$ метара. **б)** Гвожђа има 95% од 3000, тј. 2850 грама, угљеника 60 грама, силицијума 45 грама, а свега осталог 45 грама. **в)** 220, 264 и 316 КМ.

Примјер 6.3.5.
а) Један посао су радила три једнака радника и зарадили укупно 700 КМ. Први је радио 6 дана по 7 часова, други је радио 5 дана по 8 часова, а трећи 3 дана по 12 часова. Који дио зараде им припада?
б) Три радника дјеле премију од 800 КМ сразмјерно својим зарадама, које износе редом 400, 500 и 600 КМ мјесечно. Који дио премије припада сваком од радника?
в) Укупни износ 900 КМ треба подјелити на три радника који су плаћани редом 40%, 30% и 30% од бруто износа, при чему је први на том послу радио 7 часова, други 11 часова, а трећи 2 часа.

Рјешење: а) Први, други и трећи радник су укупно радили редом 42, 40 и 36 часова, што је укупно 118 часова рада на датом послу. Према томе, њима припада 42/118, 40/118 и 36/118 од 700 КМ, тј. 249, 237 и 214 КМ, заокружено до једне конвертиибле марке.
б) Радницима припада редом 4/15, 5/15 и 6/15 од 800 КМ, тј. 213, 267 и 320 КМ.
в) Рачун плаћања поредајмо овако. Први, други и трећи радник су рецимо радили заједно прва два часа. Тада су зарадили 2/11 од укупне своте 900 КМ, тј. 164 КМ. Тај износ дјелимо сразмјерно њиховим платним разредима 40% : 30% : 30%, па они редом добијају 66, 49 и 49 КМ.
Затим рачунамо сљедећих 5 часова када су радили први и други радник. Они дјеле сљедећих 5/9 од 900 КМ према размјери 40% : 30%, тј. добијају још по
$\frac{5}{9}\cdot 900\cdot\frac{4}{7}\approx 234$, и $\frac{5}{9}\cdot 900\cdot\frac{3}{7}\approx 175\,\text{КМ}$.
На крају додајемо још 4 часа плате за рад самог другог радника, што је 4/11 од 900 КМ, тј. 327 КМ.
Према томе, први, други и трећи радник требају добити по 66 + 234, 49 + 175 + 327 и 49 КМ, тј. 300, 551 и 49 КМ, приближно до једне конвертибилне марке.

Примјер 6.3.6. Рачун смјеше.
а) Произвођач је помјешао 200 кг брашна цијене 1,1 КМ по килограму са 300 кг брашна цијене 1,2 КМ. Колико је добио брашна и по којој цијени?
б) Колико воде температуре температуре 60° C и воде температуре 30° C треба помјешати да се добије 90 литара воде температуре 50° C?
в) Колико грама злата финоћа 65 %, 60 % и 45 % треба узети да би се добило 900 грама злата финоће 50 %?

Рјешење: а) Добио је 500 кг брашна цијене x, гдје је $200\cdot 1{,}1+300\cdot 1{,}2=500\cdot x$.
Према томе, једино рјешење је x = 1,16 КМ. **б)** Једначине из претходног задатка овдје су $x+y=90$ и $60\cdot x+30\cdot y=50\cdot 90$, чије рјешење је x = 60, y = 30 литара.
Примјетимо да је тражена температура смјеше 50° двоструко ближа топлијој него хладнијој води и да је усуто двоструко више топлије 60° него хладније воде 30°.
в) Према слици, разлике процената до 50 % су редом 50, 100 и 150 у смјеру



стрелице. Узете количине *x*, *y* и *z* грама злата биће пропорционалне наведеним разликама. Отуда једначине $x+y+z=900$ и $x:y:z=50:100:150$ и рјешење 150, 300 и 450 грама злата, истим редом. То је једно од рјешења.

Примјер 6.3.7. Проценти.
а) Нека супстанца садржи 99% воде. Нешто воде испари остављајући супстанцу са 98% воде. Колико је воде испарило?
б) Било је 198 мушкараца и 2 жене у соби. Колико мушкараца мора изаћи да би се њихов проценат смањио на 98%.

Рјешење: а) Рецимо, прво смо имали *v* воде и *s* супстанце. Почетна пропорција је $\frac{v}{v+s}=\frac{99}{100}$. Затим је вода редукована испаравањем за неки коефицијент *r* тако да је остало *rv* воде, односно 98%. Нова пропорција је $\frac{rv}{rv+s}=\frac{98}{100}$. Отуда $r = 0{,}495$ што значи да је 49,5% воде остало, односно да је 50,5% испарило. **б)** Било је 99% мушкараца од свих особа у соби. Жене су прво 1 % од свих особа, затим њихов број порасте на 2%. Да би 2 жене чиниле 2% људи у соби, требало би да има 100 људи у соби. Према томе треба бити 98 мушкараца. Дакле, 100 мушкараца мора изаћи.

Прост каматни рачун дат је формулом $K=G\cdot T\cdot\frac{p}{100}$, гдје је *K* камата, *G* главница, *T* је вријеме у годинама, *p* проценат каматне стопе у годинама.

Према **енглеској методи** се узима да година има 365 (преступна 366) дана, по **француској** и **њемачкој** има 360 дана и посебно у њемачкој методи сваки мјесец има 30 дана. На примјер, 79 дана према енглеској и француској методи износи $T=\frac{79}{365}\approx 0{,}216$, а према њемачкој $T=\frac{79}{360}\approx 0{,}219$ година.

6.4. Комбинаторика

Комбинаторика је грана чисте математике која се бави проучавањем пребројавања дискретних (коначних, или бесконачних пребројивих) скупова.
Посебно разликујемо **пермутације** односно низове у којима је битан редосљед и у којима нема сувишних елемената. **Варијације** су дјелови низова у којима је битан редосљед елемената, као на примјер низ цифара у броју. **Комбинације** у ужем смислу су низови у којима није битан редосљед елемената, рецимо скупови.

Примјер 6.4.1. Пермутације.
а) Поредајмо три слова АБВ на све могуће начине без понављања слова.

б) Поредајмо четири слова АБВГ на све могуће начине без понављања слова. Колико је то пермутација.
в) Колико пермутација има низ од $n \in \mathbf{N}$ различитих слова.

Рјешење: а) АБВ, АВБ, БАВ, БВА, ВАБ и ВБА. **б)** 24 начина. **в)** $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, чит. „ен факторијел“.

Примјер 6.4.2. Варијације.
а) Написати све двочлане поднизове (варијације) трочланог низа АБВ.
б) Наћи све двочлане варијације (поднизове) четворочланог низа АБВГ.
в) Наћи све трочлане варијације четворочланог низа АБВГ.
г) Колико има k-чланих варијација n-чланог низа?

Рјешење: а) АБ, АВ, БА, БВ, ВА, ВБ. **г)** Бројеви $k \leq n$ су природни. Замислимо да имамо k позиција у које треба редом бирати n елемената без понављања. У прву позицију можемо ставити било који од n елемената, што значи n могућности. У сљедећу позицију можемо ставити било који од преосталих n-1 елеменат, што значи укупно $n \cdot (n\text{-}1)$ могућност. Даље, радимо исто до краја, у к-ту позицију можемo ставити било који од преосталих n-k+1 елеменат, са $V_k^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ могућности.

Примјер 6.4.3. Варијације без понављања треће и четврте класе (разреда).
а) Колико троцифрених бројева са различитим цифрама је могуће написати са шест цифара 0-5?
б) Колики је четвороцифрених бројева могуће написати са пет цифрара 0-4?

Рјешење: а) У три позиције, класе треба распоредити шест цифара 0, 1, ..., 5, тако да нула не може бити у првој. Прва класа не смије садржати нулу, али може било коју од осталих пет цифара, што значи 5 могућности. Друга класа, друга цифра може бити било која од преосталих укључујући нулу, па имамо опет 5 могућности. У трећи разред може ићи било која од преостале 4 цифре. То је укупно 5·5·4 = 100 могућности. **б)** 4·4·3·2 = 96.

Примјер 6.4.4. Варијације са понављањем.
а) Колико троцифрених бројева је могуће написати са шест цифара 0-5?
б) Колико четвороцифрених бројева је могуће написати са пет цифара 0-4?

Рјешење: а) Опет имамо три класе, позиције цифара. У прву може ићи било која од пет цифара 1-5. У другу и трећу може ићи иста, или било која цифра од шест 0-5. То је укупно 5·6·6 = 120 различитих бројева. **б)** 500.

Примјер 6.4.5. Комбинације без понављања.
а) Колико 2-чланих подскупова има скуп са 5 елемената?
б) Колико 3-чланих подскупова има скуп са 5 елемената?
в) Колико има k-чланих подскупова скупа са n елемената?
г) Који подскуп 10-чланог скупа има више елемената: 2-члани, или 8-члани?

Рјешење: а) Посматрајмо двије позиције (класе, или разреда) у које ћемо бирати елементе датог 5-чланог скупа. На прву позицију бирамо било који од 5 могућих елемената, а затим за другу преостаје 4, што чини 5·4 могућности. Даље, примјетимо да не треба узимати различите редосљеде истих елемената, тј. пермутације парова, којих има 2! = 1·2. Број тражених подскупова, број комбинација класе 2 од 5 елемената је количник $C_2^5 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$. **б)** $C_3^5 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$. **в)** $C_k^n = \frac{V_k^n}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k}$. **г)** Има их једнако, по 45, јер је $C_2^{10} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = \frac{10 \cdot 9 \cdot (8 \cdot ... \cdot 3)}{1 \cdot 2 \cdot (3 \cdot ... \cdot 8)} = C_8^{10}$.

7. Изрази

7.1. Ирационални бројеви

Изрази попут $\sqrt{3}$ или $\sqrt[3]{4}$ називају се **корјени**. Први читамо „(други) корјен из три“, а други „трећи корјен из четири“. Први је број који (два пута) множен сам са собом даје број три, а други је број који три пута множен сам са собом даје број четири. Како је $(1{,}732)^2 \approx 3$ то је $\sqrt{3} \approx 1{,}732$ односно $\sqrt[3]{4} \approx 1{,}587$ јер је $(1{,}587)^3 \approx 4$.

На примјер: $\sqrt{2} = 1{,}414...$; $\sqrt{3} = 1{,}732...$; $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{5} = 2{,}236...$; итд. Када имају децимале ови бројеви су низови децималних цифара који се не понављају периодично. То значи да (примјер 6.1.1.) такви бројеви нису рационални. Корјени природних бројева када нису цијели су **ирационални бројеви**.

Примјер 7.1.1. Доказати да се број $\sqrt{2}$ не може написати као разломак чији су бројник и називник цијели бројеви.

Доказ: Претпоставимо супротно, да је $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ скраћен разломак, гдје су m и n цијели бројеви. Јасно је да то тада морају бити природни бројеви. Такође, да мора бити $m^2 = 2n^2$.

Према томе, m је паран број, па можемо писати $m = 2k$, гдје је $k = 1, 2, 3, ...$, гдје је k неки природан број (два пута мањи од m).

Даље, смјенимо ли m у претходни израз добијамо $(2k)^2 = 2n^2$, тј. $n^2 = 2k^2$. Сада видимо да је и n паран број. Према томе, оба броја m и n су парни, па полазни разломак није скраћен.

То је контрадикција са полазном претпоставком из које слиједи да је претпоставка неодржива, односно да је тачно супротно тврђење, да се број $\sqrt{2}$ не може написати као цјелобројни разломак.♦

Основне особине корјена које нама требају су:

$$\sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y} \text{ и } \sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}},$$

односно да је корјен производа једнак производу корјена и да је корјен количника једнак количнику корјена. Такође, корисно је знати да је

$$\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x} \text{ и реципрочно } \frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{x}.$$

Примјер 7.1.2. Поједноставити:

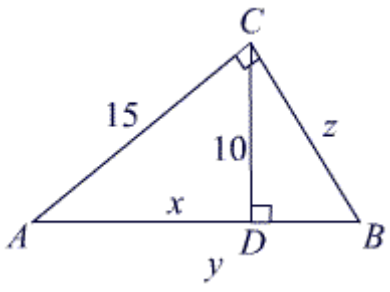
а) $\sqrt{20}+\sqrt{45}$; **б)** $\sqrt{6}\cdot\sqrt{15}$; **в)** $(4\sqrt{3}-\sqrt{2})(4\sqrt{3}+\sqrt{2})$; **г)** $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$.

Рјешење: а) $\sqrt{4\cdot5}+\sqrt{9\cdot5}=2\sqrt{5}+3\sqrt{5}=5\sqrt{5}$; **б)** $\sqrt{2\cdot3}\cdot\sqrt{3\cdot5}=\sqrt{2\cdot9\cdot5}=\sqrt{9\cdot10}=3\sqrt{10}$; **в)** $(4\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2=48-4=44$; **г)** $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{9\cdot2}}=\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=1$.♦

Примјер 7.1.3. Представити разломком исте вриједности са рационалним називником: **а)** $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$; **б)** $\frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$.

Рјешење: а) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; **б)** $\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{6}+3\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{18}-12\sqrt{6}}{24-18}=4\sqrt{2}-2\sqrt{6}$.

Примјер 7.1.4. На слици десно је правоугли троугао *ABC* са висином *CD*. Страница *AC* = 15 cm и висина *CD* = 10 cm. Наћи дужине *AD* = *x*, *AB* = *y* и *BC* = *z*.



Рјешење: Питагорина теорема даје $x^2=15^2-10^2$, тј. $x=5\sqrt{5}$ cm. Из сличности $\Delta ACD\sim\Delta ABC$ налазимо 15 : x = y : 15 = z : 10. Отуда је $y=9\sqrt{5}$ cm и $z=6\sqrt{5}$ cm.♦

7.2. Растављање на факторе

Свака од рачунских операција посебно, сабирање (са одузимањем) и множење (са дјељењем) је асоцијативна. То значи да за свака три броја a, b и c важи једнакост

$$(a + b) + c = a + (b + c), \text{ односно } (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

На примјер, $(2 + 3) + 5 = 5 + 5 = 10$ даје исти резултат као $2 + (3 + 5) = 2 + 8 = 10$. Слично томе, $(2 \cdot 3) \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 30$ и такође $2 \cdot (3 \cdot 5) = 2 \cdot 15 = 30$.

Множење је дистрибутивно према сабирању бројева, тј. $a(b+c) = ab + ac$ за свака три дата броја. Знамо да у изразу без заграда прво обављамо множења (и дјељења) па тек онда сабирања (и одузимања). На примјер $2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$, јер је на обе стране исти резултат 16.

Асоцијативност и дистрибутивност су особине основних рачунских операција које нам омогућавају да исте нумеричке вриједности можемо писати различитим математичким изразима, формулама.

7.2.1. Непосредним множењем можемо провјерити да су тачни сљедећи изрази:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, квадрат збира;
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, куб збира;
$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, четврти степен бинома.

7.2.2. У претходним изразима замјенимо b са $-b$ и добићемо:

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, квадрат разлике;
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, куб разлике;
$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$, четврти степен разлике.

7.2.3. Примјетимо да се претходни коефицијенти појављују у Паскаловом троуглу:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Формирати сљедећи ред Паскаловог троугла па на основу тога провјерити формулу за пети степен (збира и разлике) бинома:

$(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$.

7.2.4. Непосредним множењем можемо провјерити једнакости:

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, разлика квадрата;
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, разлика кубова;
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, збир кубова.

Примјер 7.2.5. Раставити на чиниоце, факторе:
а) $x^5 + x + 1$; **б)** $x^4 + x^2y^2 + y^4$; **в)** $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

Рјешење: а) $= x^5 - x^2 + x^2 + x + 1 = x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$
$= (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$; **б)** $= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2$
$(x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy)$; **в)** $= ((x + y + z)^3 - x^3) - (y^3 + z^3)$
$= ((x + y + z) - x)((x + y + z)^2 + x(x + y + z) + x^2) - (y + z)(y^2 - yz + z^2)$
$= (y + z)((3x^2 + y^2 + z^2 + 3xy + 3xz + 2yz) - (y^2 - yz + z^2))$
$= (x + y)(3x^2 + 3xy + 3xz + 3yz) = 3(y + z)(x(x + y) + z(x + y))$
$= 3(x + y)(x + z)(y + z)$. ♦

Задаци 7.2.6.
1. Раставити на факторе:
а) $2x^2 - x - 1$; б) $3a^2 + 2a - 1$; в) $5b^2 - 4b - 1$; г) $7c^2 + 6c - 1$.
2. Раставити на факторе:
а) $6a^2 + 13ab - 5b^2$; б) $14u^2 + 19uv - 3v^2$; в) $10x^2 + 9xy - 7y^2$.
3. Квадрирати биноме:
а) $2a - 3$; б) $3x + 5\sqrt{2}$; в) $3u - 2v$; г) $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$.
4. Допунити израз до квадрата бинома и написати бином:
а) $4x^2 - 12x + \ldots$; б) $9a^2 + 30a\sqrt{2} + \ldots$; в) $9m^2 - 12mn + \ldots$; г) $12 + 12\sqrt{6} + \ldots$.
5. Користећи формулу за квадрат збира провјерити једнакости:
$(a \pm b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \pm 2ab + 2ac \pm 2bc$.
6. Кубирати биноме:
а) $2a + 1$; б) $x - 3$; в) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$; г) $2\sqrt{5} - b$.
7. Допунити израз до куба бинома и написати бином:
а) $8x^3 - 12x^2 + \ldots$; б) $a^3 + 9a^2 + \ldots$; в) $3\sqrt{3} - 9\sqrt{2} + \ldots$; г) $24\sqrt{3} + 36c + \ldots$.
8. Раставити као разлику квадрата:
а) $(a + b)^2 - c^2$; б) $(\sqrt{5} + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$; в) $\left(2x - \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{4}{9}$; г) $\left(\sqrt{3} - 1\right)^2 - 2$.
9. Раставити као разлику, или збир кубова:
а) $(a + 1)^3 - 125$; б) $(x - 3) + 343$; в) $x^6 - 1$; г) $a^3b^3 + a^3 - b^3 - 1$.
10. Раставити на факторе:
а) $5a^{3n+3} - 125a^{n+1}$; б) $3b^{4n+2} + 81b^{n-1}$; в) $c^{5n} - 4c^{3n} - 8c^{2n} + 32$; г) $x^{6n} + 56x^{3n} - 512$.

7.3. Поједностављивање

Скратити, редуковати **разломак** значи раставити на факторе бројник и називник и подјелити их заједничким фактором, ако такав постоји. Добијени разломак има

исту вриједност као почетни под условом да фактор којим је дјељено није једнак нули. Разломак је скраћен када је подјељен највећим заједничким дјелиоцем бројника и називника.

Примјер 7.3.1. а) $\frac{21}{35}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}=\frac{3}{5}$; **б)** $\frac{x^2-x}{x^2-1}=\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x}{x+1}$, $x-1\neq 0$.

Супротна операција скраћивању је проширивање разломака. **Сабрати** (одузети) **разломке** значи проширити сваки до најмањег заједничког дјељитеља називника, затим преписати добијени називник и сабрати (одузети) бројнике.

Примјер 7.3.2. а) $\frac{2}{3}-\frac{3}{5}+\frac{4}{7}=\frac{70}{105}-\frac{63}{105}+\frac{60}{105}=\frac{67}{105}$; **б)** $\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}=$
$\frac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)(x-1)}-\frac{2x(x-1)}{x(x+1)(x-1)}+\frac{3x(x+1)}{x(x+1)(x-1)}=\frac{x^2-1-2(x^2-x)+3(x^2+x)}{x(x^2-1)}=$
$\frac{2x^2+5x-1}{x^3-x}$.

Множење (дјељење) **разломака** значи множење (дјељење) њихових посебно бројника и називника и формирање новог разломка са добијеним бројником односно називником. Дакле:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\text{, односно }\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a:c}{b:d}.$$

У случају дјељења, дјелиоци морају бити различити од нуле.

Примјер 7.3.3. а) $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{6}{35}$, односно $\frac{10}{35}:\frac{5}{7}=\frac{2}{5}$; **б)** $\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x}{x-1}=\frac{x^2}{x^2-1}$, односно
$\frac{x^2-1}{x^3+1}:\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1}{x^2-x+1}$, $x\neq\pm 1$.

Дјељећи разломке дешаваће се да бројници и називници нису дјељиви. Тада разломке дјелимо тако што први **помножимо реципрочном вриједношћу** другог:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}.$$

Примјер 7.3.4. а) $\frac{7}{10}:\frac{9}{13}=\frac{7}{10}\cdot\frac{13}{9}=\frac{91}{90}$; **б)** $\frac{x}{x+1}:\frac{x}{x-1}=\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x-1}{x}=\frac{x(x-1)}{x(x+1)}=$
(након скраћивања добијамо) $=\frac{x-1}{x+1}$, $x\neq 0$.

Трећи начи дјељења разломака је помоћу **двојних разломака**, који се рјешавају тако да ванјске дијелове (горњи бројник и доњи називник) множимо у нови бројник, а унутрашње (горњи називник и доњи бројник) множимо у нови називник:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}.$$

Примјер 7.3.5. Поједноставити изразе:

а) $a-\dfrac{1}{a-\dfrac{1}{a-\dfrac{1}{a}}}$; **б)** $\dfrac{1-b+\dfrac{1}{1+b}}{1+\dfrac{1}{1-b^2}}$; **в)** $\dfrac{\dfrac{8a^3}{27b^3}-1}{\dfrac{4a^2}{9b^2}+\dfrac{2a}{3b}+1}$; **г)** $\dfrac{1-b^n}{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{b^3}+...+\dfrac{1}{b^n}}$.

Рјешење: а) $=a-\dfrac{1}{a-\dfrac{a}{a^2-1}}=a-\dfrac{a^2-1}{a^3-2a}=\dfrac{a^4-3a^2+1}{a^3-2a}$, $a\neq 0,1,-1$; **б)** $1-b$, $b\neq \pm 1$; **в)** $\dfrac{2a}{3b}-1$, $b\neq 0$; **г)** $=\dfrac{(1-b)(1+b+b^2+...+b^{n-1})}{\dfrac{1}{b^n}\cdot(b^{n-1}+b^{n-2}+b^{n-3}+...+1)}=b^n\cdot(1-b)$, $b\neq 0$.

Задаци 7.3.6. Поједноставити изразе:

1. а) $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x+2}{x^2+3x+2}$; **б)** $\dfrac{a-3}{a+2}-\dfrac{a-2}{a+3}+\dfrac{a+7}{a^2+5a+6}$.

2. а) $\left(\dfrac{m}{n}-\dfrac{n}{m}\right)\cdot\left(2-\dfrac{2m}{m-n}\right)\cdot\left(1+\dfrac{m-n}{m+n}\right)$; **б)** $\dfrac{x^2y}{x-x^2-y}\cdot\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)\cdot\left(\dfrac{1+x}{y}-\dfrac{1+y}{x}\right)$.

3. а) $\left(\dfrac{u}{u^2-uv}-\dfrac{2}{u-v}+\dfrac{v}{u-v}\right):\left(\dfrac{u}{v}-2+\dfrac{v}{u}\right)$; **б)** $\left(\dfrac{m-n}{m+n}-\dfrac{m+n}{m-n}\right):\left(\dfrac{m+n}{m-n}+\dfrac{m-n}{m+n}\right)$.

4. а) $\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2+c^2-b^2+2ac}+\dfrac{2c}{a+c-b}\right):\left(1+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2bc}\right)$;

б) $\left(\left(\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v+w}\right):\left(\dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{v+w}\right)\right):\left(1+\dfrac{v^2+w^2-u^2}{2vw}\right)$.

8. Задаци

1. Доказати да је за сваки природни број n:

а) n^3-5n^3+4n дјељив са 120;

б) n^3+3n^2+2n дјељив са 6.

2. Доказати да за свако $n\in\mathrm{N}$:

а) $(n-1)(2n+5)(7n-6)$ су дјељиви са 6;

б) n^2+1 нису дјељиви са 3.

3. Троцифрен број написан у бројном систему са основом 7 има исте цифре, али у обрнутом редосљеду од записа истог броја у систему са основом 9. Који је то број?

4. Број написан у бројном систему са основом 7 и исти број записан у систему са основом 9 односе се као 2:3. Који је то број?

5. Ако је n природан број, тада су сви бројеви

а) $4^{n+2}+5^{n+2}+4^{n+3}+5^{n+3}$ дјељиви са 10;

б) $2^{n+2}+3^{2n+1}+2^{n+1}-3^{2n}$ дјељиви са 6.

6. Методом математичке индукције доказати, ако је m цијели број и $x \equiv y \pmod m$, тада је за сваки природни број n $x^n \equiv y^n \pmod m$.

7. Фибоначијеви бројеви су дефинисани рекурентном релацијом:

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ (\forall n \in \mathrm{N})\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n .$$

То су бројеви 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610,... . Методом математичке индукције доказати да за сваки природни број n:

а) f_{3n} је паран;

б) f_{4n} је дјељив са 3;

в) $(\forall k \in \mathrm{N})\ k \mid n \Rightarrow f_k \mid f_n$.

8. Марко је осам година старији од своје сестре. За три године он ће бити од ње два пута старији. Колико година он има сада?

9. Катарина је два пута старија од Биљане. За три године збир њихових година биће 42. Колико је година Катарини?

10. Ваздух је смјеша гасова, запремински углавном 78% азота, 20% кисеоника, 1% аргона и других састојака. Колико у 1000 литара ваздуха има сваког од ових састојака?

11. У Републици Српској је љета 2007. године завршило гимназију 2410, средњу техничку школу 7187, средњу стручну школу 4211 и средњу специјалну школу 37 ученика. Колико је то у процентима?

12. За 450 КМ купљено је 5 метара штофа ширине 90 центиметара. Колико треба новаца за 7 метара истог штофа ширине 75 центиметара? Цијена штофа је директно пропорционална дужини и ширини.

13. У једној аутопраоници је 5 радника за 7 часова опрало 115 аутомобила. Колико би 3 таква радника опрали аута за 3 часа?

14. На складишту има кафе цијене 5,5 КМ по килограму и цијене 6,25 КМ. По колико их треба узети да бисмо добили 900 килограма мјешавине по цијени 6 КМ по килограму?

15. Килограм мљевеног бибера прве врсте кошта 10,10 КМ, а друге врсте 9,65 КМ. Колико од сваке врсте треба узети да би се добило 120 килограма мјешавине по цијени 9,80 КМ по килограму?

16. Шта је веће, 27% од 370, или 40% од 250?

17. На столу су шоља кафе и шоља чаја. Из прве преспите једну кашику кафе у шољу са чајем, а затим из друге шоље преспите једну кашику текућине у шољу са кафом. Да ли у првој шољи више чаја, или у другој има више кафе?

18. Подигли смо кредит од 5000 КМ по каматној стопи 8% годишње на три године. Колики је укупни износ камате, а колики је укупни дуг? Колика је мјесечна рата, тј. ануитет?

19. Позајмили смо 7000 КМ по каматној стопи 6% годишње на 5 година. Колики је укупни износ камате, а колики је укупни дуг? Колика је мјесечна рата?

20. Доказати да је $\sqrt{3}$ ирационалан број.

21. Доказати да је број $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ирационалан.

22. Поједноставити изразе:

а) $(4-3\sqrt{2})^2+(4-3\sqrt{2})(4+3\sqrt{2})$; б) $\frac{1}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2}-1)-\sqrt{2}(1-\sqrt{8})$.

23. Наћи површину троугла катете дужине 20 cm и висине на хипотенузу 12 cm.

Раставити на факторе изразе:

24. а) $(x^2+4x)(x^2+4x+6)+9$; б) $(y^2-5y)(y^2-5y+8)+16$;
в) $(a^2+5a)(a^2+5a+10)+24$; г) $(b^2+7b)(b^2+7b+22)+120$.

25. а) $x^{10}-x^6+x^4-1$; б) $u^6-u^5-u^4+2u^3-u^2-u+1$;
в) $64y^6-16y^3+1$; г) $v^6+v^5-v^4-2v^3-v^2+v+1$.

26. а) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$;
б) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$;
в) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$.

27. Доказати Диофантове и Лагранжове идентитете:

а) $(ax+by)^2+(ay-bx)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$;

б) $(ax-by)^2+(ay+bx)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$;

в) $(ax+by)^2-(ay+bx)^2=(a^2+b^2)(x^2-y^2)$;

г) $(x^2+y^2)(a^2+b^2)-(ax+by)^2=(bx-ay)^2$.

III Геометрија

Геометрија је грана математике која се бави проучавањем особина просторних облика. У основи, геометрија је **наука о фигурама**, о узајамном положају и размјерама њихових дјелова и о њиховим трансформацијама.

Фигура је непразан скуп тачака.

Полуправа је скуп свих тачака једне праве p са једне стране било које њене фиксне тачке P заједно са овом тачком. Поменута тачка P је почетна тачка полуправе.

Угао је скуп од двије полуправе са заједничком почетном тачком; те полуправе се тада називају краци угла, а заједничка тачка тјеме угла. Угао увијек припада једној равни, коју краци дијеле на унутрашњу и спољашњу област.

Дуж је скуп свих тачака једне праве p између двије њене тачке A и B, заједно са овим тачкама. Поменуте тачке A и B називају се крајње тачке дужи. Свака тачка $T \in p$ дате праве унутар датих тачака $p \in AB$ је унутрашња тачка дужи.

Ако дуж AB чија је једна крајња тачка на једном, а друга на другом краку угла, припада (унутрашњој) области угла ова област је испупчена па се такав угао назива **испупчен**, или конвексан. Ако ова дуж не припада области угла, ова област је удубљена, па се такав угао назива **удубљен**, или конкаван.

Угао чији краци образују праву назива се **испружен** угао. Два угла који имају један заједнички крак, а остала два крака образују праву називају се **упоредни** углови. Угао који је једнак свом упоредном углу назива се **прав** угао. Два угла чији краци образују двије праве називају се **унакрсни** углови.

Кружница је скуп свих тачака у равни које су подједнако удаљене од једне фиксне тачке те равни. Фиксна тачка се назива средиште или центар кружнице, а подједнака удаљеност је полупречник кружнице. Кружница дијели раван којој припада на унутрашњу и спољашњу област.

Полураван је скуп свих тачака неке равни π с једне стране дате праве p те равни заједно са том правом. Права p зове се гранична права полуравни.

Овдје ћемо се бавити само геометријом у једној равни**. Планиметрија** је дио геометрије у једној равни који се бави проучавањем мјерења дужина, углова, или површина, за разлику од **стереометрије** која проучава мјерења тродимензионалних геометријских фигура, са дужином, ширином и висином.

Диједар, или двостран, је скуп од двије полуравни α и β са заједничком граничном правом p. Те полуравни $p\alpha$ и $p\beta$ су стране диједра, а заједничка права p ивица диједра. Диједар дијели простор на двије области, унутрашњу и спољашњу. Ако дуж чије су крајње тачке у странама диједра припада (унутрашњој) области диједра

ова област је испупчена тзв. конвексна, а ако не припада области диједра диједар се назива удубљен или конкаван.

Сфера је скуп свих тачака у простору подједнако удаљених од једне фиксне тачке. Фиксна тачка је средиште или центар сфере, а подједнака удаљеност је полупречник сфере. Дио простора ограничен сфером назива се **лопта.**

Први записи о геометрији нађени су у древном Египту и Вавилонији у периоду до око 6. вијека п.н.е. Геометрија је настала са потребама мјерења тла. У периоду од Талеса до **Еуклида** (сл. лијево), у античкој Грчкој од 6. до 3. вијека п.н.е. геометрија је заснивана на тада откривеној дедуктивној методи закључивања.

Наредних два миленијума су 13 томова књига Еуклидових **Елемената** биле основни уџбеник геометрије у земљама арапског Истока, у средњој Азији, у Индији и Европи.

Аналитичка геометрија, коју су открили Декарт и Ферма почетком 17. вијека, изучава својства геометријских фигура на основу њихових алгебарских једначина, ослањајући се на метод координата. Убрзо се појавила **пројективна** геометрија Дезарга, Паскала и Понселеа. У 18. вијеку су Ојлер и Монж открили **диференцијалну** геометрију. Затим, почетком 19. вијека, истражујући постулат о паралелним правама Лобачевски је отрио нову, **неуклидску** геометрију, којој је на трагу био и Бољаји, а коју су убрзо прихватили Гаус, Риман и Ајнштајн.

Хилбертов систем аксиома је први пут објављен на самом крају 19. века у делу: Др Давид Хилберт, Основе геометрије (*David Hilbert, Grundlagen der Geometrie*, 1899), као одговор на тадашње фундаменталне проблеме Еуклидске геометрије. Књига која је много пута превођена и прерађивана, да би данас била позната под именом Хилбертове основе геометрије. Код нас је 1957. године изашла под уредништвом академика Радивоја Кашанина, тадашњег управника Математичког института САНУ, и у преводу Ж. Гарашанина са 8. немачког издања. То је основа за онај дио математике који називамо **елементарна геометрија.**

9. Аксиоме

Доказ је образлагање тачности тврђења.

Аксиоме су почетни искази неке математичке теорије које сматрамо истинитим без доказа.

Теореме су искази који су логичке посљедице аксиома. Прецизније, теореме су геометријски ставови које прихватамо тек пошто их докажемо помоћу аксиома, или дугих усвојених геометријских истина.

Савремене **аксиоме Еуклидске геометрије** које је открио Д. Хилберт крајем 19. вијека дјеле се у пет група:

1. аксиоме везе (1-8);
2. аксиоме распореда (1-4);
3. аксиоме подударности (1-5);
4. аксиома паралелности;
5. аксиоме непрекидности (1-2).

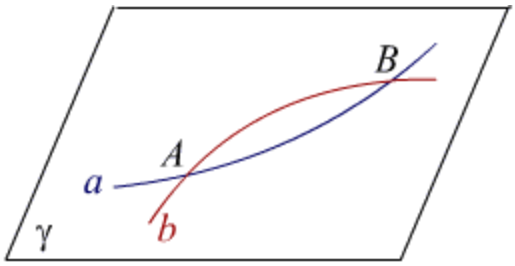
9.1. Аксиоме везе, инциденције

Аксиоме ове групе представљају везу између тачака, правих и равни. Називају се и аксиоме инциденције.

I-1 За двије тачке увијек постоји права која припада свакој од ових двију тачака.
I-2 За двије тачке не постоји више од једне праве која би припадала свакој од двеју тачака.
I-3 На правој постоје увек најмање двије тачке. Постоје најмање три тачке које не леже на једној правој.
I-4 Ма за које три тачке које не леже на истој правој, увијек постоји раван која припада свакој од ове три тачке. За сваку раван увек постоји тачка која јој припада.
I-5 За ма које три тачке које не леже на истој правој не постоји више од једне равни која припада свакој од ових трију тачака.
I-6 Ако двије тачке праве леже у некој равни, онда свака тачка те праве лежи у истој равни.
I-7 Ако двије равни имају заједничку тачку, онда оне имају најмање још једну заједничку тачку.
I-8 Постоје најмање четири тачке које не леже у једној равни.

У Хилбертовој геометрији тачке означавамо великим латиничним словима *A, B, C, ...*; праве, полуправе, дужи означавамо малим словима *a, b, c, ...*; равни, полуравни, углове означавамо малим грчким словима $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; осим када је наглашено другачије.

Аксиома I-7 изражава да простор нема више од три димензије, аксиома I-8 изражава да простор нема мање од три димензије. Аксиоме I-1-3 могу се назвати аксиомама равни групе I за разлику од аксиома I-4-8 које називамо просторним аксиомама групе I.



На слици лијево је демонстрација прве двије аксиоме инциденције (I-1,2), за две тачке A и B постоји тачно једна права $a = b$ која припада свакој од ових двеју тачака.

Иначе, под двјема, трима, ... тачкама, правама, равнима подразумијевамо различите тачке, праве, равни.

Теорема 9.1.1. Двије разне праве a и b могу имати највише једну заједничку тачку.

Доказ: Највише једну значи једну, или ниједну. Сада претпоставимо супротно, да двије праве a и b имају двије тачке заједничке, тачке A и B. На основу аксиома I-1,2 знамо да кроз двије дате тачке пролази тачно једна права. Према томе те двије праве нису разне, већ би се подударале, тј. $a = b$. Дакле, супротна претпоставка није тачна, што значи да је тачно тврђење теореме. ♦

Колинеарне тачке су тачке које припадају истој правој. Аксиома I-3 обезбеђује постојање тачака изван једне праве.

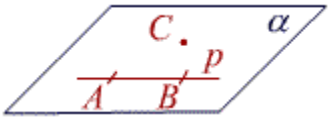
Теорема 9.1.2. Раван је одређена трима тачкама које не припадају истој правој.

Доказ је непосредна посљедица аксиоме I-4. ♦

Појам **једнозначно одређен** има значење појма **један једини.**

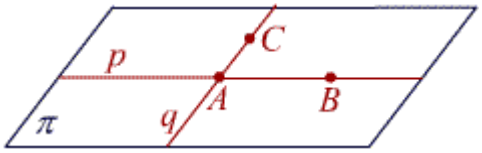
Теорема 9.1.3. Раван је једнозначно одређена правом и тачком ван те праве.

Доказ: Нека је дата права p и тачка C ван ње, као на сљедећој слици. Према аксиоми I-3, на правој p постоје тачке A и B, а према аксиоми I-4, кроз тачке A, B и C може се поставити само једна раван α. Пошто су тачке A и B на правој p и у равни α, према аксиоми I-6 све тачке ове праве припадају равни α. Даље, свака раван којој којој припада права p и тачка C припада тачкама A, B и C, а то је према аксиомама I-4,5 раван α. Дакле, раван α је једина раван одређена правом p и тачком C. ♦



Теорема 9.1.4. Раван је једнозначно одређена двјема правама које се сјеку.

Доказ: Нека је $p \cap q = \{A\}$, као на сљедећој слици. Према аксиоми I-3 на правој p осим тачке A постоји и тачка B, а на правој q осим тачке A постоји и тачка C. Према аксиоми I-4 тачке A, B и C припадају само једној равни π. Према аксиоми I-5 постоји највише једна раван π којој припадају три наведене тачке. ♦



Теорема 9.1.5. Ако двије разне равни имају једну заједничку тачку оне се сијеку; њихов пресјек је права.

Доказ: Ако двије равни α и β имају једну заједничку тачку A, према аксиоми I-7 оне морају имати најмање још једну заједничку тачку B. Кроз тачке A и B можемо према аксиомама I-1,2 конструисати само једну праву p која према аксиоми I-6 мора припадати објема равнима, јер њене двије тачке A и B припадају овим равнима. Дакле, пресјек равни α и β је права p.

Обратно, ако би сем праве п постојала и нека тачка ван ње која би припадала обема равнима, та би тачка са двије произвољне тачке праве п биле заједничке тачке обеју равни, те би се према аксиоми И-5 ове равни поклапале. То је противрјечно са претпоставком теореме, што значи да је пресјек ових равни заиста права. ♦

Теорема 9.1.6. Свака права која не припада равни може са том равни имати највише једну заједничку тачку.

Доказ: Ако дата права има са равни двије заједничке тачке, према аксиоми I-6 та права са том равни има све тачке заједничке, лежи у равни. То противрјечи претпоставци теореме да права не припада равни. Према томе, та права не може имати двије заједничке тачке са равни. ♦

Компланарне тачке су тачке које припадају истој равни. Аксиома I-8 обезбеђује постојање тачака изван једне равни.

Задаци 9.1.7.
1. Двије праве се сијеку а једна припада датој равни. Које положаје може имати друга права према тој равни?

2. Двије праве се сијеку у датој равни. У којем положају према тој равни је трећа права која сијече поменуте праве?

3. Колико равни одређују четири некомпланарне тачке?

4. Колико равни одређује 5 тачака од којих су 4 некомпланарне?

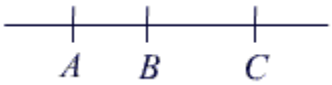
5. Колико је равни одређено једном правом и двјема тачкама ван те праве?

9.2. Аксиоме распореда

Аксиоме ове групе дефинишу појам "између" и на основу овог појма дефинишу распоред тачака на правој, у равни и у простору.

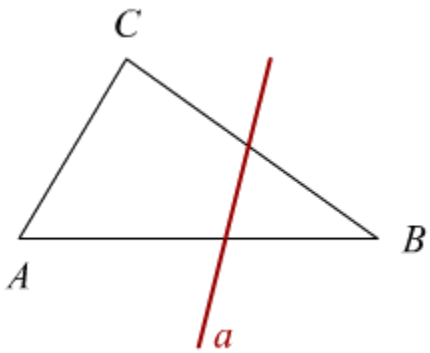
II-1 Ако тачка B лежи између тачака A и C, онда су A, B, C три различите тачке праве и B лежи такође између C и A.

II-2 За две тачке *A* и *C* увек постоји најмање једна тачка *B* на правој *AB*, тако да *C* лежи између *A* и *B*.
II-3 Од ма којих трију тачака праве не постоји више од једне која лежи између оне друге двије.
На слици десно тачке *A*, *B* и *C* су колинеарне, при чему је *B* између *A* и *C*. Према аксиоми II-1 тада је *B* између *C* и *A*.



Дуж је скуп тачака одређен двјема тачкама на правој и свим тачкама које су **између** њих.

II-4 Нека су *A*, *B* и *C* три тачке које не леже на једној правој и нека је *a* права у равни *ABC* која не пролази ни кроз једну од тих тачака; ако тада дата права пролази кроз једну од тачака дужи *AB*, она мора пролазити кроз једну од тачака дужи *AC*, или тачака дужи *BC*.



Ове аксиоме је први детаљно испитао М. Паш[1]. Нарочито је аксиома II-4 Пашова, која слободно речена гласи: ако права улази у унутрашњост троугла она из њега и излази.

На слици лијево видимо троугао *ABC* и праву *a* у равни троугла, која сјече страницу троугла, дуж *BC*. Може се доказати да та права не пресјеца обе дужи *AC* и *BC*.

9.3. Аксиоме подударности

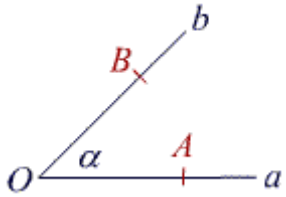
Аксиоме ове групе дефинишу појам подударности, једнакости а тиме и појам кретања.

III-1 Ако су *A*, *B* двије тачке на правој *a* и ако је, даље, *A*' тачка на истој или на другој правој *a*', онда се може увек наћи таква тачка *B*' праве *a*' на датој страни од тачке *A*', да дуж *AB* буде подударна или једнака дужи *A*'*B*', што означавамо на следећи начин: $AB \equiv A'B'$.
III-2 Ако су дужи *A*'*B*' и *A*"*B*" подударне једној истој дужи *AB*, биће и дуж *A*'*B*' подударна дужи *A*"*B*", или кратко: ако су двије дужи подударне трећој, подударне су и међу собом.
III-3 Нека су *AB* и *BC* двије дужи на правој *a* без заједничких тачака и нека су, даље, *A*'*B*' и *B*'*C*' две дужи на истој правој *a* или на некој другој правој *a*' које исто тако немају заједничких тачака; ако је тада $AB \equiv A'B'$ и $BC \equiv B'C'$, биће увек и $AC \equiv A'C'$.

[1] *Moritz Pasch*: *Vorlesungen uber neuere Geometrie*, *Leipzig* 1882.

Поредак тачака овдје није битан, што значи да је увијек $AB \equiv BA$.Отуда је подударност дужи релација еквиваленције, тј. рефлексивна, симетрична и транзитивна. Трећа аксиома изражава могућност сабирања дужи.

Угао $\angle(a, b)$ односно $\angle(b, a)$ је систем двије полуправе које припадају разним правама a и b и излазе из исте тачке O у равни α.
Полуправе Oa и Ob називају се краци угла, тачка O је тјеме угла. Те полуправе заједно са тјеменом угла дијеле раван пи на два дјела, на унутрашњост и спољашњост угла.



Углови такође могу бити у релацији подударности (конгруенције), једнакости. Угао α са тјеменом у тачки O на чијем једном краку лежи тачка A а на другом B означава се $\angle AOB$, или $\angle B$. Углови се означавају и малим грчким словима.

III-4 Нека је дат угао $\angle(p, q)$ у равни α и права a' у равни α' као и одређена страна равни α' према правој a'. Нека p' означава полуправу праве a' која полази из тачке O'; онда у равни α' постоји једна и само једна полуправа q' тако да је угао $\angle(p, q)$ подударан или једнак углу $\angle(p', q')$ и у исто време све унутрашње тачке угла $\angle(p', q')$ налазе се на датој страни од праве a', што ћемо означити на овај начин $\angle(p, q) \equiv \angle(p', q')$. Сваки је угао подударан самом себи.

9.4. Аксиома паралелних

Дефиниција 9.4.1. Праве су **паралелне** када припадају истој равни а немају заједничких тачака, не сјеку се.

Дефиниција 9.4.2. Праве су **мимоилазне** ако нису паралелне и не сјеку се.

IV (Еуклидова аксиома). Нека је a произвољна права и A тачка ван a: тада постоји у равни, одређеној правом a и тачком A, највише једна права која пролази кроз A и не пресеца a.

Теорема 9.4.3. Раван је једнозначно одређена двјема паралелним правама.

Доказ: Према аксиоми IV, паралелне праве a, b припадају једној равни π. На слици лијево, раван π је једина раван којој припадају те паралелне праве, јер свакој равни којој припадају ове праве припадају и двије тачке прве праве и једна тачка друге, што је према аксиоми I-5 раван π.♦

Када права p припада равни π писаћемо $p \in \pi$. Када та права не припада поменутој равни писаћемо $p \notin \pi$.

Када хоћемо да конструишемо праву b кроз дату тачку A ван дате праве a паралелну са a, треба прво конструисати раван кроз тачку A и праву a. Тражена

паралела b мора припадати овој равни. Наиме, паралелне праве одређују једну раван.

Ако двије праве не припадају истој равни, не могу се поклапати, то су **разне праве.** Али према првој дефиницији (12.4.1.) оне нису паралелне, а према другој дефиницији (12.4.2) оне нису паралелне. Према теореми 12.1.4. оне се не сјеку, те су опет према другој дефиницији ове праве мимоилазне. Тиме смо доказали сљедећу теорему.

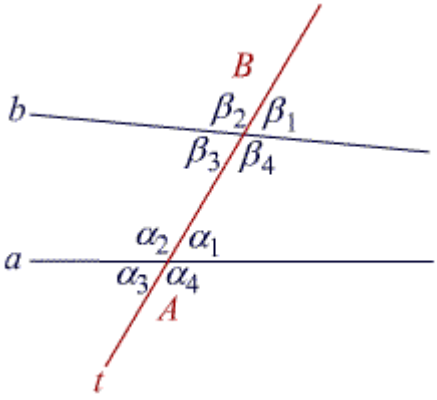
Теорема 9.4.4. Две праве су мимоилазне ако не припадају истој равни.

9.5. Аксиоме непрекидности

V-1 (Аксиома мјерења или Архимедова аксиома). Ако су AB и CD ма које двије дужи, онда онда постоји неки такав број n, да када се дуж CD пренесе n пута од A једно за другим по полуправој која пролази кроз тачку B прелази се преко тачке B.
V-2 (Аксиома линеарне потпуности). Систем тачака неке праве са својим релацијама распореда и конгруенције не може се тако проширити да остану очуване релације које постоје између претходних елемената као и основне особине линеарног распореда и конгруенције које проистичу из аксиома I-III и аксиоме V-1.

10. Углови

Паралелне праве су у истој равни, а немају заједничких тачака, или се поклапају.
Угао је дио равни омеђен са двије полуправе са заједничким почетком. Почетак називамо и тјеме угла, а граничне полуправе крацима угла.



На слици лијево, праве a и b пресјечене су правом t коју називамо **трансферзала**. Нека су A и B тачке пресјека трансферзале са a и b. Те тачке су тјемена осам углова $\alpha_1, \alpha_2, ..., \beta_4$.

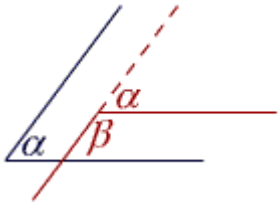
Унутрашњи углови су они чији краци садрже дуж AB, то су $\alpha_1, \alpha_2, \beta_3$ и β_4. Остали углови су **спољашњи**, то су $\alpha_3, \alpha_4, \beta_1$ и β_2.

Сагласни углови су један спољашњи и један унутрашњи са исте стране трансферзале, на примјер α_3 и β_3. **Наизменични** углови су два спољашња или два унутрашња са разних страна трансвезрале, на примјер α_3 и β_1. **Супротни** углови су два спољашња или два унутрашња са исте стране трансферзале, на примјер α_1 и β_2.

10.1. Углови са паралелним крацима

Суплементни углови су они чији збир је испружени угао, чија мјера је 180° (степени).

Теорема 10.1.1. Углови са паралелним крацима су једнаки или су суплементни.



На слици десно $\alpha + \beta = 180°$.

Троугао чине три тачке које не леже на истој правој (неколинеарне су) и три дужи које их спајају. Тачке називамо тјемена троугла, а дужи страницама троугла. Дате тачке су тјемена, а странице леже на крацима **унутрашњих углова** троугла.

Вањски угао троугла формира продужетак једне странице и друга страница.

Теорема 10.1.2. Збир углова у троуглу је 180°.

Теорема 10.1.3. Вањски угао троугла једнак је збиру два унутрашња њему не сусједна угла.

Теорема 10.1.4. Збир вањских углова троугла је 360°.

Примјер 10.1.5. Показати да:

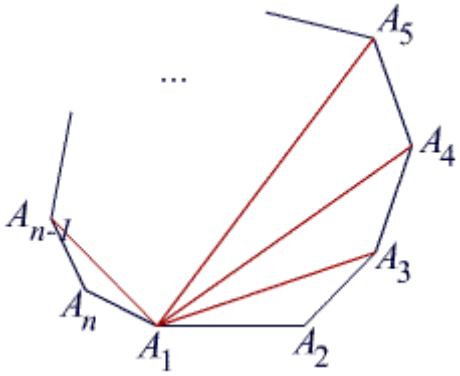
а) Збир унутрашњих углова четвороугла је 360°.

б) Збир унутрашњих углова петоугла је 540°.

в) Збир унутрашњих углова n-то угла је $(n-2)\cdot 180°$.

г) Збир вањских углова n-то угла је 360°.

Рјешење: в) На слици доле десно је n-то угао у једној равни $n \in \{3, 4, 5, \ldots\}$. Из тјемена A_1 су повучене n-3 дијагонале, дужи A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, …, A_1A_{n-1}. Тиме су формирана n-2 троугла $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_4A_5$, ..., $A_1A_{n-1}A_n$. Збир унутрашњих углова је $(n-2)\cdot 180°$.



Примјетите да се n-2 унутрашња угла троуглова са тјеменом у A_1 сабирају у унутрашњи угао тог тјемена многоугла. Такође, сабирају се по два угла у осталим тјеменима, плус заједнички угао у тјемену A_n.

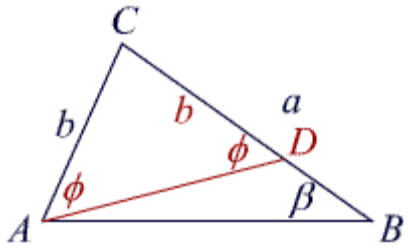
г) На претходној слици видимо да је сваки вањски угао многоугла суплементан са одговарајућим унутрашњим. Означимо са α_1, α_2, α_3, ..., α_n, унутрашње и β_1, β_2, β_3, ..., β_n, одговарајуће спољашње углове датог многоугла. Тада је $\alpha_1 + \beta_1 = 180°$, $\alpha_2 + \beta_2 = 180°$, $\alpha_3 + \beta_3 = 180°$, ... , $\alpha_n + \beta_n = 180°$. Отуда $\beta_1+\beta_2+\beta_3+...+\beta_n = (180°-\alpha_1) + (180°-\alpha_2) + (180°-\alpha_3) + ... + (180°-\alpha_n) = n\cdot 180° + \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+...+\alpha_n = n\cdot 180° + (n-2)\cdot 180° = 360°$.

Једнакостранични троугао има све три стране једнаке дужине и сва три угла једнака, по 60°.

Једнакокраки троугао има једнаке двије странице које се називају краци и два једнака угла на трећој која се назива основица.
Разностраничан троугао има све три странице различитих дужина и сва три угла различих мјера (величина).
У сљедећем поглављу Подударност доказаћемо да наспрам једнаких страница троугла леже једнаки углови и обрнуто.

Теорема 10.1.6. Наспрам дуже стране налази се већи угао троугла.

Доказ: На слици десно је троугао ABC, гдје је страница BC > AC, тј. $a > b$.
То значи да на BC постоји унутрашња тачка D, таква да је C-D-B и CD = b. Троугао ADC је једнаккокрак, па су му углови у тјеменима A и D једнаки, названи ϕ. Како је угао ϕ мањи од ∠BAC = α и са друге стране ϕ је спољашњи угао троугла ABD, што значи већи од угла β = ∠ABD, тј. $\alpha > \phi > \beta$, слиједи $\alpha > \beta$, што је и требало доказати.♦



Теорема 10.1.7. Наспрам већег угла налази се дужа страница троугла.

Наиме, ако је $\alpha > \beta$, онда према претходном ставу не може бити $a > b$. Ако троугао није једнакокрак преостаје једина могућност $b > a$.♦

Тежишница троугла (или медијана) је дуж која спаја врх троугла са средњом тачком његове супротне странице. Све три тежишнице троугла сјеку се у једној тачки коју називамо **тежиште**. Тежиште троугла дијели тежишницу у односу **2:1** почев од врха.

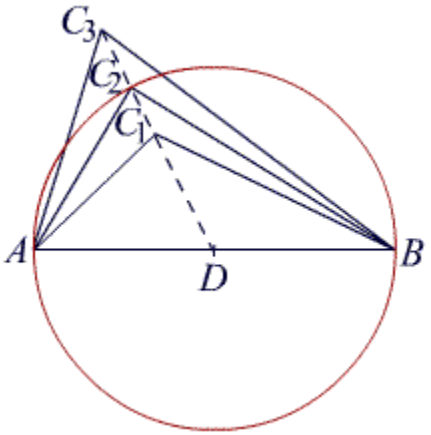
10.2. Углови са окомитим крацима

Примјер 10.2.1. Ако је CD тежишница троугла ABC:

1. Ако је $CD < \frac{AB}{2}$ тада је ∠C > 90°.

2. Ако је $CD = \frac{AB}{2}$ тада је ∠C = 90°.

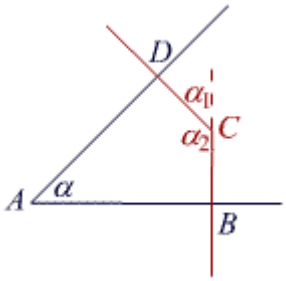
3. Ако је $CD > \frac{AB}{2}$ тада је ∠C < 90°.



Доказ: 1. У троуглу ABC имамо два троугла.
Из AD > CD слиједи ∠ACD > α, и
из DB > CD слиједи ∠DCB > β. Сабирањем добијених неједнакости излази γ > α + β,
па како је збир углова у троуглу 180°, слиједи γ > 180° - γ, а отуда γ > 90°. **2.** Ако су краци AD и CD (односно DB и CD) једнаки онда су једнаки углови на основици, тј. ∠ACD = α (односно ∠DCB > β). Сабирањем неједнакости добијемо γ = α + β, затим на сличан начин γ = 90°.♦

Правоугли троугао има један угао од 90° (деведесет степени) насупрот којег је страница коју називамо хипотенуза, а преостале двије странице катетама.
Комплементни углови су они чији збир је 90°, половина испруженог угла.
Висина троугла је дуж која из врха троугла иде окомито на супротну страницу, под углом 90°. Све три висине троугла сјеку се у једној тачки коју називамо **ортоцентар**. Дужине страница троугла су обрнуто пропорционалне одговарајућим висинама.

Теорема 10.2.2. Углови са окомитим крацима су једнаки или су суплементни.



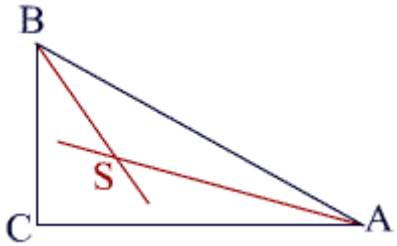
Доказ: Краци углова из тјемена A и C су окомити у тачкама B и D. Четвороугао ABCD на слици десно, има збир унутрашњих углова 360°, па је $\alpha + \alpha_2 = 180°$. Такође, имамо $\alpha_1 + \alpha_2 = 180°$.♦

Примјер 10.2.3. Углови α и β троугла ABC су 36°45'30" и 62°25'30" .
а) Колики је угао γ, у тјемену C датог троугла?
б) Кроз тјемена датог троугла конструисане су праве паралелне наспрамним страницама. Израчунати углове између ових правих.
в) Одредити углове које образују висине које полазе из тјемена A и B.

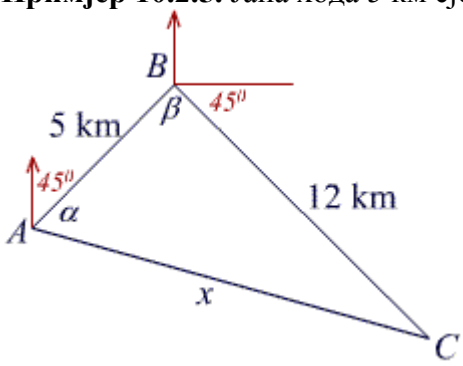
Упутство: а) Степени, минуте и секунде, дјелови угла су у систему базе 60. **б,в)** Углови са паралелним крацима, такође и углови са окомитим крацима су једнаки или су суплементни.

Симетрале унутрашњих углова троугла сјеку се у тачки коју називамо центар уписаног круга троугла.
Симетрале страница троугла сјеку се у тачки коју називамо центар описаног круга троугла.

Примјер 10.2.4. Показати да је троугао правоугли ако и само ако се симетрале два унутрашња угла сјеку под углом 135°.
Рјешење: Оштри углови правоуглог троугла ABC у тјеменима A и B су α и β. Они су комплементни, тј. $\alpha + \beta = 90°$. Углови у истоименим тјеменима троугла ABS, који формира хипотенуза датог троугла и симетрале углова, су половине α/2 и β/2, па је њихов збир 45°. То значи да трећи угао, у тјемену S износи 135°. **Обратно**, ако угао у тјемену S износи 135°, онда је збир остала два угла у тјеменима A и B (мањег) троугла 45°, па је збир истоимених углова већег троугла 90°. То значи да је угао у тјемену C прав.♦



Примјер 10.2.5. Јана хода 5 км сјеверо-источно и затим 12 км југо-источно. Наћи њену удаљеност од почетне позиције.



Рјешење: На слици лијево, Јана хода испрекиданом линијом ABC. $\angle ABC = \beta = 90°$ па из Питагорине теореме имамо $x^2 = 5^2 + 12^2$, тј. $x = 13$ км.

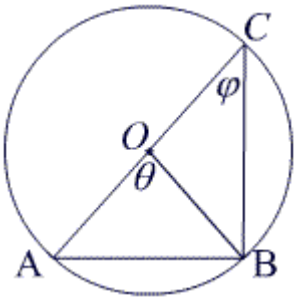
Сјеверни азимут Јане у хоризонталној равни, на крају је $45° + \alpha = 112{,}38°$.

10.3. Углови на кружници

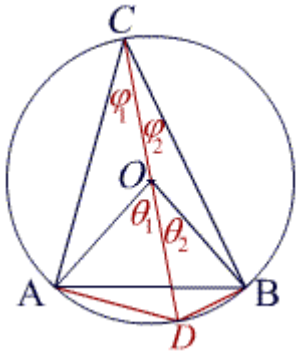
Кружница је геометријско мјесто тачака (у равни) једнако удаљених од једне тачке, коју називамо центар круга. Једнаку удаљеност називамо полупречник круга, а кружницу називамо и периферија круга.
Тетива је дуж која спаја двије тачке на кружници.
Тангента је права која са кружницом има само једну заједничку тачку.

Теорема 10.3.1. Централни угао је двоструко већи од периферног угла над истом тетивом.
Доказ проводимо у три дијела.

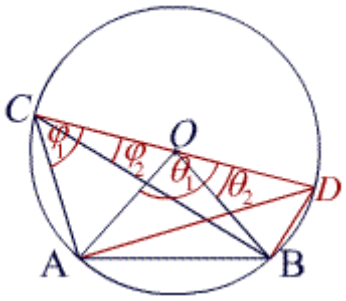
1.



2.



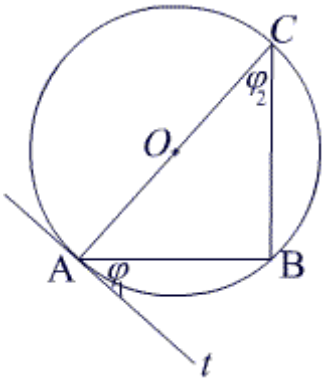
3.



1. На првој слици имамо једнакокраке троуглове AOB и BOC, чији су краци полупречници круга. Зато је $\angle OBC = \varphi$, па је $\theta = 2\varphi$ као ванјски угао троугла. **2.** На другој слици слично, над тетивама AD затим DB, имамо $\theta_1 = 2\varphi_1$ и $\theta_2 = 2\varphi_2$, па због $\theta = \theta_1 + \theta_2$ добијамо збирно $\theta = 2\varphi$. **3.** На трећој слици $\theta = \theta_1 - \theta_2$, а тетиве су AD и BD. ♦

Примјер 10.3.2. (Талесов став) Помоћу претходног става доказати.

а) Периферни угао над пречником је прав.
б) Периферни углови над тетивом су једнаки (суплементни), када су са исте (супротне) стране тетиве.
в) Угао између тетиве и тангенте једнак је периферном над истом тетивом.



Упутство: б) На претходној слици 2. је угао CAD прав, па су оштри углови правоуглог троугла ACD комплементни. Такви су и оштри углови правоуглог троугла BCD. Збир сва четири је 180°. **в)** На слици десно, углови tAB и ACB имају узајамно окомите краке.

10.4. Задаци

1. У правоуглом троуглу висина дијели хипотенузу на два одсјечка чија је разлика једнака дужини једне катете. Израчунати углове троугла.

2. Доказати да у правоуглом троуглу тежишна дуж и висина конструисане из тјемена правог угла образују угао једнак разлици његових оштрих углова.

3. У једнакокраком троуглу симетрала угла на основици и висина конструисана из истог тјемена граде угао од 9°. Израчунати углове троугла.

4. Под којим се углом сјеку симетрале спољашњих углова на хипотенузи правоуглог троугла?

5. Изразити помоћу угла γ угао између симетрала углова α и β датог троугла.

6. У троуглу ABC симетрала CD угла γ сјече страницу AB под углом 105°. Израчунати углове троугла ако се зна да је CD = BC.

7. Доказати да висине AA' и BB' троугла ABC образују са страницом AB углове чији је збир једнак $\angle C$.

8. Ако је тачка H ортоцентар (пресјек висина h_a и h_b) троугла ABC, доказати да је $\angle AHB + \angle C = 180°$.

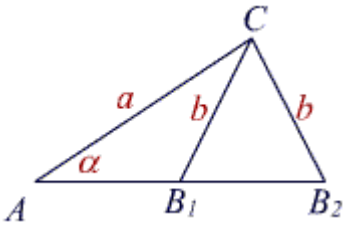
11. Подударност

Подударност, или сукладност (понекад једнакост дужина) у геометрији се доказује помоћу подударности троуглова, која се изводи из геометријског кретања, или изометријских трансформација простора. Ми ћемо се прво упознати са основним особинама подударности у примјени, а затим са њеним строжијим заснивањем.

За два троугла кажемо да су подударни ако имају све три одговарајуће странице међусобно једнаке, све три одговарајућа угла једнака, све одговарајуће висине једнаких дужина, једнаке дужине одговарајућих тежишница, симетрала углова,

симетрала страна, итд. Међутим, да би два троугла била подударни довољно је да имају подударна само три елемента, према сљедећим ставовима (овдје аксиомама):

ССС) Два троугла су подударна ако су им узајамно подударне све три странице;
СУС) Два троугла су подударна ако су им подударне двије странице и угао захваћен њима;
УСУ) Два троугла су подударна ако им је подударна по једна страница и оба угла на њој;
УСС) Два троугла су подударна ако су им подударне по један угао и двије странице, при чему је дати угао наспрам дуже дате стране.



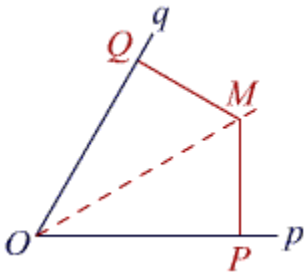
Посљедњи став (усс) има додатни услов који можемо разумјети помоћу слике на лијевој страни.

Троуглови AB_1C и AB_2C нису подударни, мада имају испуњен први дио спорног става (усс), ако је дати угао α наспрам мање стране b.

Када су двије фигуре Φ_1 и Φ_2 подударне пишемо $\Phi_1 \cong \Phi_2$.

Примјер 11.0.1. У конвексном углу Opq дата је тачка M. Ако је P подножје нормале из M на Op и Q подножје нормале из M на Oq и ако је $MP = MQ$, доказати да је права OM симетрала угла Opq.

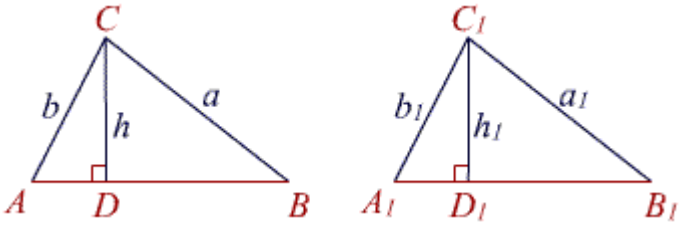
Доказ: На слици десно, троуглови OMP и OMQ су правоугли ($\angle P = \angle Q = 90°$), са најдужом страном, заједничком хипотенузом OM. По претпоставци су им једнаке и катете $MP = MQ$, па према ставу УСС слиједи $\Delta OMP \cong \Delta OMQ$, одакле $\angle POM = \angle QOM$. ♦



11.1. Подударност троуглова

Примјер 11.1.1. Доказати да су два троугла подударна када су им подударне по двије странице и висина између њих.

Доказ: На сљедећој слици, на троугловима ABC и $A_1B_1C_1$ дате су подударности:



$BC \cong B_1C_1$, $AC \cong A_1C_1$ и $CD \cong C_1D_1$, тј. $a \cong a_1$, $b \cong b_1$ и $h \cong h_1$. Угао који гради висина, тј. $\angle D = 90°$. Рецимо да је $a \geq b$.

Прво, докажимо да су помоћни Qроуглови ΔADC и $\Delta A_1D_1C_1$ подударни. Из једнакости правих углова $\angle D = \angle D_1$, затим $a = a_1$ и $h = h_1$, и става УСС, који овдје важи јер се наспрам већег угла

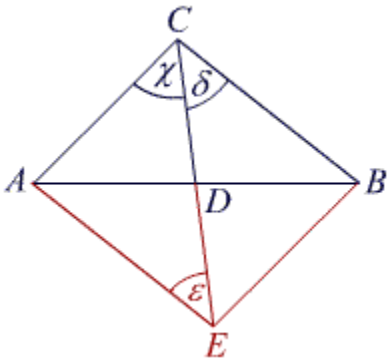
троугла налази дужа страна (теорема 10.1.7.), тј. хипотенуза b је већа од катете h, слиједи $\Delta ADC \cong \Delta A_1D_1C_1$. Отуда $\angle A = \angle A_1$.

Друго, користећи дате једнакости $a = a_1$, $b = b_1$ и претпоставку $a \geq b$ са управо доказаном једнакошћу $\angle A = \angle A_1$, из истог става УСС слиједи тражена подударност $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$.♦

Тежишница, тежишна линија (или медијана) троугла је дуж која спаја врх са средином супротне странице троугла. Све три тежишнице троугла се сијеку у једној тачки која се назива **тежиште** троугла. Тежиште троугла дијели (сваку) тежишницу у односу **2:1** почев од врха.

Примјер 11.1.2. Ако је тежишна линија троугла истовремено и симетрала угла, тада је тај троугао једнакокрак. Доказати.

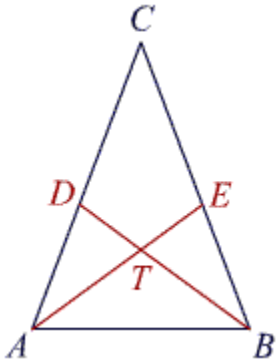
Доказ: На сљедећој слици десно дат је троугао ABC, са тежишноцом, односно симетралом угла CD. По претпоставци је $\chi = \delta = \angle C/2$, и $AD = DB$.



Продужимо тежишницу, односно симетралу CD до тачке E тако да је C-D-E и $CD = DE$. Тада је $\angle BDC = \angle ADE$ (унакрсни углови), па из става СУС слиједи подударност $\Delta BDC \cong \Delta ADE$. Отуда једнакости $BC = AE$ и $\delta = \varepsilon$. Сада троугао AEC има два једнака угла, због чега је једнакокрак, тј. $AC = AE$. Из добијених једанкости страница слиједи $AC = BC$, тј. троугао ΔABC је једнакокрак.♦

Примјер 11.1.3. Троугао је једнакокраки ако и само ако су му двије тежишне линије једнаке.

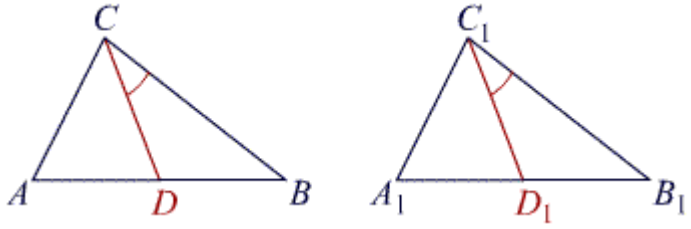
Доказ: Ако је троугао једнакокраки биће $AC = BC$, али и $EC = CD$ = пола крака, на слици лијево. Како је угао у тјемену C заједнички троугловима AEC и BDC, према ставу СУС је $\Delta AEC \cong \Delta BDC$, одакле $AE = BD$, тј. тежишнице су једнаке.



Обратно, ако су тежишнице једнаке, тј. $AE = BD$, онда је $AT = BT = 2/3$ тежишнице, затим $DT = ET = 1/3$ тежишнице, и једнаки су унакрсни углови $\angle ATD = \angle BTE$. Према томе и због става СУС су подударни троуглови ATD и BTE. Отуда $AD = BE$, те $AC = BC$, што значи да је троугао ABC једнакокраки.

Примјер 11.1.4. (Општинско такмичење у Србији, 17. децембар 1983. године) Троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ су подударни. Нека су D и D_1 унутрашње тачке страница AB и A_1B_1. Ако је $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$, доказати $AD = A_1D_1$.

Доказ: На сљедећим сликама се лако види да су троуглови BCD и $B_1C_1D_1$ подударни (став УСУ), па је $DB = D_1B_1$ и отуда $AB - DB = A_1B_1 - D_1B_1$, затим $AD = A_1D_1$.♦



Задаци 11.1.5.
1. Доказати да су троуглови ABC и $A'B'C'$ подударни ако је:
а) $b = b'$, $h_a = h_a'$, $\beta = \beta'$; **б)** $h_c = h_c'$, $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$;
в) $a = a'$, $c = c'$, $t_c = t_c'$; **г)** $h_c = h_c'$, $t_c = t_c'$, $c = c'$.

2. Доказати да су два правоугла троугла подударна ако су им једнаке:
а) хипотенуза и по једна катета; **б)** катета и по један оштар угао.

3. Доказати да су два троугла подударна ако су им подударне двије странице и тежишница која одговара једној од ових страница.

4. Ако је M било која тачка симетрале дужи AB тада је $AM = BM$. Доказати.

5. Паралелограм је четвороугао који има два пара паралелних страна. Доказати:
а) четвороугао који има један пар паралелних страна је паралелограм;
б) четвороугао коме се дијагонале полове је паралелограм.

6. Користећи дефиниције паралелограма из претходног задатка, доказати да је средња линија троугла (дуж која спаја средине двије странице) паралелна основици (трећој страници) троугла и једнака половини њене дужине.

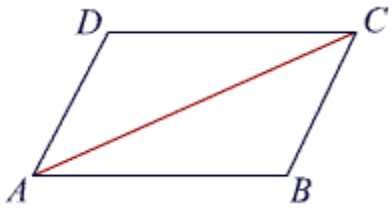
11.2. Подударност и четвороугао

Четвороугао је затворена изломљена линија са четири дијела, странице многоугла, које се настављају, састају у тјеменима четвороугла. Четвороугао у ужем смислу је равнински, четвороугао у једној равни.

Дефиниција 11.2.1. Паралелограм је четвороугао са два пара паралелних страна.

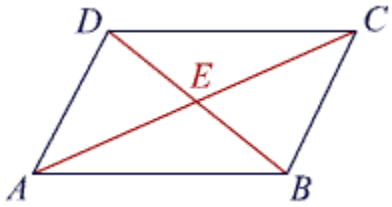
Стране паралелограма се налазе на паралелним правама, што значи да је

паралелограм увијек равански четвороугао. На слици десно, дат је паралелограм $ABCD$ са дијагоналом AC. Углови са паралелним крацима су једнаки $\angle ACB = \angle CAD$, и $\angle CAB = \angle ACD$, па према ставу УСУ имамо подударност $\Delta ABC \cong \Delta CDA$. То значи да су наспрамне странице паралелограма једнаких дужина. Отуда еквивалентна дефиниција.



Дефиниција 11.2.2. Паралелограм је четвороугао са једним паром паралелних страна једнаких дужина.

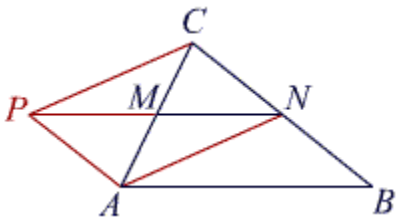
Дакле, ако имате пар паралелних дужи AB и CD једнаких дужина спајањем крајева BC и DA добијамо паралелограм $ABCD$, као на слици десно. Дијагонале тог паралелограма које се сјеку у тачки E формирају подударне троуглове $\Delta ABE \cong \Delta CDE$ (став УСУ) па је тачка E средина сваке од дијагонала. Обратно, ако је E средина дијагонала, онда су исти троуглови опет подударни (став СУС). Отуда сљедећа еквивалентна дефиниција.



Дефиниција 11.2.3. Паралелограм је четвороугао чије се дијагонале полове.

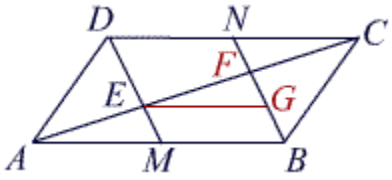
Примјер 11.2.4. Доказати да је средња линија троугла паралелна једној страници троугла и једнака половини њене дужине.

Доказ: Дат је троугао ABC са тачкама M и N које су средине страница AC и BC, на сљедећој слици. Дуж MN је једна од три средње линије тог троугла. Продужимо MN до тачке P тако да је P-M-N и $PM = MN$. Према дефиницији (3) четвороугао $ANCP$ је паралелограм. Отуда и према дефиницији (2) CN и PA су паралелне и једнаке дужи. Даље, према дефиницији (2) четвороугао $ABNP$ је паралелограм. Отуда, $MN \,||\, AB$ и $AB = 2 \cdot MN$. ♦



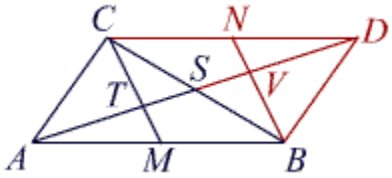
Теорема 11.2.5. Нека су M и N средине супротних страница AB и CD паралелограма $ABCD$. Дужи DM и BN дијеле дијагоналу AC на три једнака дијела.

Доказ: На сљедећој слици, пресјеци DM и BN са датом дијагоналом су тачке E и F. Троуглови AME и CNF су подударни (УСУ) па је $AE = FC$. На истој слици је $EG \parallel MB$ па је $MBGE$ паралелограм и $\Delta EGF \cong \Delta AME$ (УСУ), што значи да је такође $AE = EF$. Према томе дужи DM и BN дијеле дијагоналу AC на три једнака дијела. ♦



Посљедица 11.2.6. Тежиште троугла дијели тежишницу у односу 2:1 почев од тјемена.

Доказ: Дат је троугао ABC са тежишницама (медијанама) AS и CM које се сијеку у тежишту T, на слици десно. Продужимо AS за исти износ до тачке D. Добили смо паралелограм $ABDC$. Према претходној теореми, медијане CM и BN ($N \in CD$) дијеле дијагоналу AD у тачкама T и V на три једнака дијела $AT = TV = VD$. Како је S средина



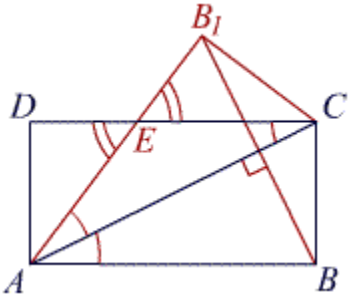
Дужи TV то је $AT = 2 \cdot TS$, тежиште T дијели тежишницу AS у односу 2:1 почев од тјемена A.♦

Дефиниција 11.2.7. Правоугаоник је паралелограм са једнаким дијагоналама. Ромб је паралелограм са окомитим дијагоналама. Квадрат је паралелограм са једнаким и окомитим дијагоналама.

Полазећи од претходне дефиниције лако је доказати да је **паравоугаоник** паралелограм са окомитим страницама, да је **ромб** паралелограм са једнаким страницама и да је **квадрат** паралелограм са окомитим и једнаким страницама.

Ромбоид је косоугли паралелограм неједнаких узастопних страница.

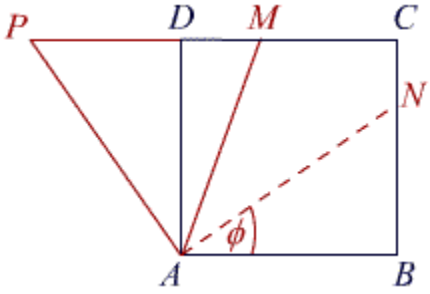
Примјер 11.2.8. (Општинско такмичење у Србији, 15. децембар 1984.) Дат је правоугаоник $ABCD$ у коме је $AB > BC$. Тачка B_1 је симетрична тачки B у односу на праву AC, а E је пресјек правих AB_1 и CD. Доказати да су троуглови ADE и CB_1E подударни.



Доказ: На слици лијево, трансферзални углови CAB и DCA су једнаки. Углови CAB и CAB_1 једнаки су јер је AB_1 симетрично са AB у односу на дијагоналу AC. Дакле, једнаки су углови DCA и CAB_1, па је троугао AEC једнакокрак ($AE = EC$). Даље, $CB_1 = CB = DA$ и такође су једнаки унакрсни углови DEA и CEB_1, па су троуглови ADE и CB_1E подударни.♦

Примјер 11.2.9. На страници DC квадрата $ABCD$ дата је тачка M. Симетрала угла BAM сијече страницу BC у тачки N. Доказати да је $AM = DM + BN$.

Рјешење: Продужимо страницу DC до тачке P тако да је P-D-M и $PD = BN$, као на слици десно. Према ставу СУС имамо $\Delta ADP \cong \Delta ABN$, па је угао APD једнак углу PAM, јер је $\angle APD = \angle ANB = 90° - \phi$, а $\angle PAM = \angle PAD + \angle DAM = \phi + (90° - 2\phi) = 90° - \phi$. Према томе, троугао AMP је једнакокрак. Затим слиједи $AM = MP = DM + DP = MD + BN$.♦



Трапез је четвороугао са само једним паром паралелних страна. Паралелне стране трапеза су наспрамне и називају се **основице**, а остале двије **краци**, односно бочне стране трапеза. Дуж чији крајеви су средине крака трапеза назива се средишња дуж, или средња линија трапеза. Једнакокраки трапез називамо онај чији краци су једнаки, а чији је један крак окомит на основице – правоугли трапез.

Трапезоид је четвороугао који нема нити један пар паралелних страница. **Делтоид** је трапезоид који има два пара једнаких узастопних страница.

Задаци 11.2.10.1. Четвороугао је паралелограм када:
а) има једнаке наспрамне странице; **б)** има једнаке наспрамне углове;
в) има суплементне узастопне углове; **в)** дијагонале му се полове.

2. Доказати да су два паралелограма подударна ако су им једнаке по двије сусједне странице и угао између њих.

3. Доказати да су два правоугаоника подударна ако су им једнаке по једна страница и дијагонала.

4. Знамо да је дијагонала AC ромба $ABCD$ симетрала углова ромба у тјеменима A и C. Доказати $\Delta ABC \cong \Delta ACD$.

5. Доказати да су два трапеза подударна ако су им једнаке обе основице, један угао на основици и једна дијагонала.

6. Ако су M и N средишта бочних страна AD и BC трапеза $ABCD$, доказати да је $AB + CD = 2 \cdot MN$.

7. Доказати да су средишта страница било ког четворогула тјемена паралелограма, или да леже на једној правој.

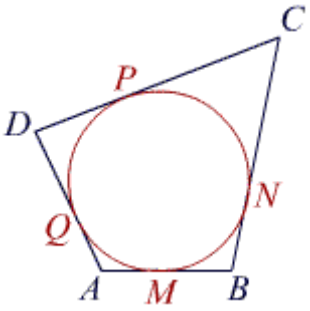
8. Нека је $ABCD$ некомпланаран (који није у једној равни) четвороугао. Ако је $AB \cong CD$ и $BC \cong AD$, доказати да је права која садржи средишта M и N дијагонала AC и BD заједничка нормала мимоилазних правих AC и BD.

11.3. Подударност и круг

У наслову 10.3. смо упознали дефиницију круга и видјели да је централни угао два пута већи од одговарајућег периферијског угла (теорема 10.3.1.). Доказали смо да је (тетивни) угао над пречником прав (примјер 10.3.2.) и да су сви периферијски углови истог круга, или подударних кругова над једнаким тетивама једнаки међу собом.

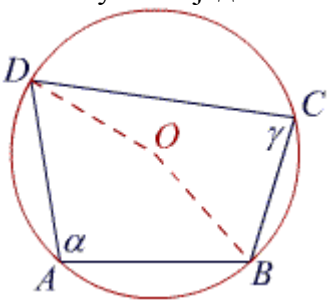
Четвороугао (многоугао) је **тангентан** ако су његове странице тангенте круга. Четвороугао (многоугао) је **тетиван** ако су његове странице тетиве круга.

Теорема 11.3.1. Конвексан четвороугао *ABCD* је тангентан ако и само ако је *AB* + *CD* = *BC* + *AD*. Код неконвексног тангентног четвороугла круг је ван четвороугла и важи |*AB* – *CD*| = |*AD* – *BC*|.



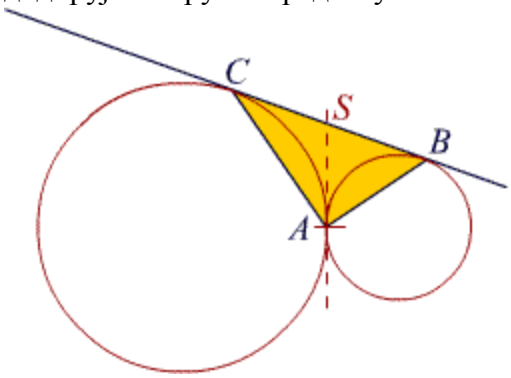
Доказ да је услов потребан. На сљедећој слици дат је четвороугао *ABCD* који додирује у њега уписану кружницу у тачкама *M*, *N*, *P* и *Q*, на страницама *AB*, *BC*, *CD* и *DA*. Повучене из исте тачке *A*, *B*, *C* и *D* тангентне дужи су једнаке, тј. *AM* = *AQ*, *BN* = *BM*, *CN* = *CP* и *DP* = *DQ*. Зато је *AB* + *CD* = *BC* + *AD*.♦

Теорема 11.3.2. Четвороугао је тетиван ако му је збир наспрамних углова једнак испруженом углу (180°).



Доказ: Тетиве кружнице на сљедећој слици формирају четвороугао *ABCD*. Централни углови (из *O*) су двоструко већи од периферних (из *A* и *C*) над истом тетивом *BD*, тј. α + γ = 180°.♦

Примјер 11.3.3. Два круга се додирују споља у тачки *A*. Заједничка тангента додирује те кругове редом у тачкама *B* и *C*. Доказати да је угао *BAC* прав (90°).



Доказ: На слици лијево, *AS* је заједничка тангента кругова у додирној тачки *A* па су једнаки одсјечци *SA* и *SB* на једном, односно *SA* и *SB* на другом кругу. Према томе *SA* = *SB* = *SC*. Отуда, трећи круг са центром у *S* пролази тачкама *A*, *B* и *C*, што значи да му је периферни угао из тачке *A* над пречником *BC* прав.♦

Задаци 11.3.4.

1. Три угла четвороугла су 65°, 105° и 115°. Може ли се око овог четвороугла описати круг?

2. Тачке *A*, *B* и *C* дијеле кружницу на три дијела у односу 1:2:3. Наћи углове троугла *ABC*.

3. Додирне тачке уписане кружнице дијеле странице троугла на одсјечке *s* – *a*, *s* – *b* и *s* – *c*, гдје је $s = \frac{a+b+c}{2}$ полуобим троугла.

4. У једнакокраки трапез се може уписати кружница ако му је крак аритметичка средина основица. Доказати.

5. Симетрале унутрашњих углова произвољног четвороугла образују тетивни четвороугао. Доказати.

6. Тангента у тачки A дате кружнице сјече продужетак пречника кружнице BC у тачки D. Колики је угао ABC ако је троугао ABD једнакокрак?

[30°]

7. Дат је круг са центром O и пречником AB. Тангенте круга у тачкама A и B сијеку произвољну његову тангенту у тачкама C и D. Доказати да је угао COD прав.

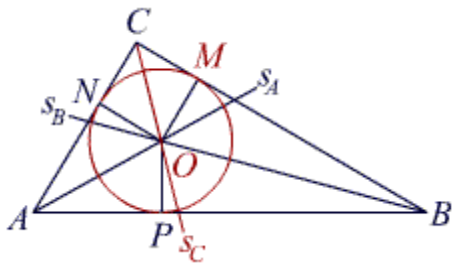
11.4. Значајне тачке троугла

Троугао смо дефинисали у једном од претходних параграфа (&10.). Такође, видјели смо да је збир углова у троуглу 180° (теорема 10.1.2.), да је вањски угао троугла једнак збиру два унутрашња њему не сусједна угла (теорема 10.1.3.), да је збир вањских углова троугла 360° (теорема 10.1.4.). Међутим, то није крај приче о основним особинама троуглова и о њиховом значају за геометрију.

Значајне тачке троугла су центар уписаног круга, центар описаног круга, ортоцентар и тежиште.

Теорема 11.4.1. Симетрале углова троугла сјеку се у једној тачки која је центар уписаног круга датог троугла.

Доказ: На сљедећој слици троугла ABC је O пресјечна тачка симетрала AO и BO углова α и β које су означене s_A и s_B. Дужи OM, ON и OP су нормале тачке O на странице BC, CA и AB.

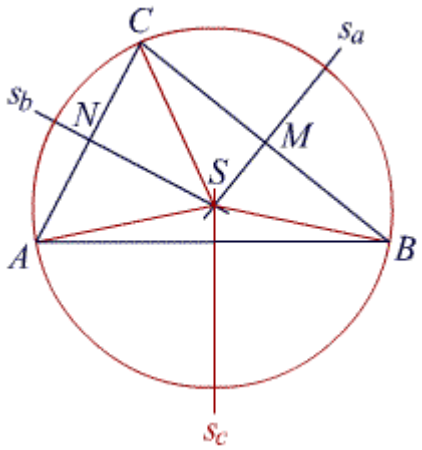


Правоугли троуглови APO и ANO су подударни јер имају заједничку хипотенузу и по један заједнички угао $\alpha/2$. Отуда $OP = ON$. Такође, подударни су правоугли троуглови BPO и BMO јер имају заједничку хипотенузу и заједнички угао $\beta/2$, па је и $OP = OM$. Тиме смо доказали $OP = ON = OM$.

Подударни су и правоугли троуглови CMO и CNO, јер имају заједничку хипотенузу, заједнички прав угао и по једну једнаку катету $OM = ON$. Отуда слиједи једнакост углова OCN и OCM, што значи да је права CO симетрала угла γ, а O је заједничка тачка све три симетрале. Из истих једнакости $OP = ON = OM$ слиједи да је O центар уписаног круга датог троугла. ♦

Теорема 11.4.2. Симетрале страница троугла сјеку се у једној тачки која је центар описаног круга датог троугла.

Доказ: На слици сљедећег троугла ABC је S тачка пресјека симетрала s_a и s_b страница BC и CA. Тачке M и N су пресјеци ових симетрала са страницама троугла.



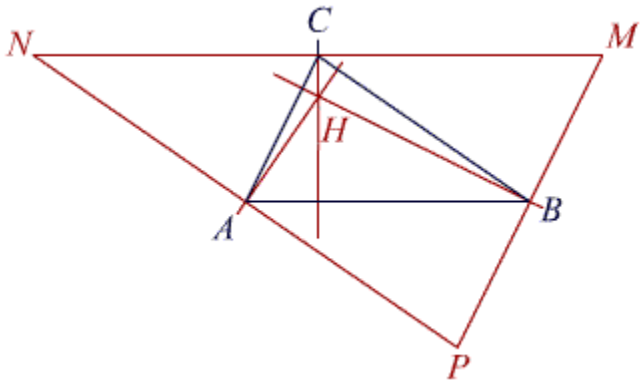
Правоугли троуглови MBS и MCS су подударни, јер имају једнаке обе катете. Отуда је $BS = CS$. На исти начин су подударни и правоугли троуглови NCS и NAS. Отуда је $CS = AS$. Због трназитивности једнакости имамо $AS = BS = CS$.

Дакле, троугао ABS је једнакокраки па тачка S припада и симетрали s_c дужи AB. Такође, постоји кружница са центром у S која пролази кроз сва три тјемена датог троугла ABC.♦

Концикличне су разне тачке које припадају истој кружници.

Теорема 11.4.3. Висине троугла сјеку се у једној тачки, ортоцентру троугла.

Доказ: На сљедећој слици, кроз тјемена A, B и C датог троугла ABC конструисане су праве NP, PM и MN паралелне страницама BC, CA и AB.

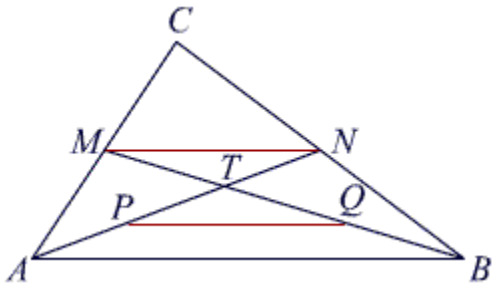


Сваки од троуглова BMC, CNA и APB подударан је са датим троуглом, јер имају по једну заједничку страницу и одговарајуће налегле, наизмјеничне углове једнаке. Отуда слиједи да су тачке A, B и C средине дужи NP, PM и MN. Према претходној теореми (11.1.2.), симетрале страница троугла MNP сјеку се у тачки H, која је назива ортоцентар троугла ABC.♦

Тежишница, тежишна дуж спаја врх са средином супротне странице троугла. **Тежиште** је тачка у којој се сјеку тежишнице троугла. Ове дефиниције смо већ помињали (&11.1.). Као посљедицу особина паралелограма (посљедица 11.2.6) видјели смо да тежиште дијели тежишницу у односу **2:1** почев од тјемена троугла. Такође, дефинисали смо **средишњицу**, средњу линију троугла, тј. дуж која спаја средине страница троугла и доказали смо (примјер 11.2.4.) да је она паралелна основици супротној страници троугла и једнака половини њене дужине.

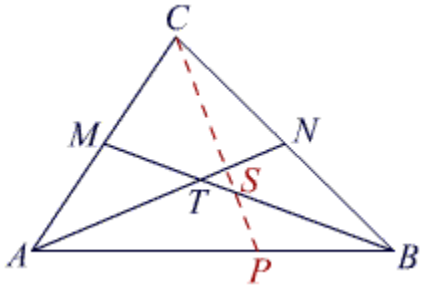
Теорема 11.4.4.
1. Тежиште дијели тежишницу троугла у односу 2:1 почев од врха.
2. Све три тежишнице троугла се сјеку у једној тачки, тежишту троугла. Постоји само једно тежиште заједничко за све три тежишнице троугла.

Доказ. 1. На сљедећој слици десно, тежишнице *AN* и *BM* троугла *ABC* сијеку се у тачки *T*. Дуж *MN* је средња линија троугла која је, као што знамо паралелна основици *AB* и једнака је половини њене дужине. Средишња линија троугла *ABT* је *PQ*, која је такође паралелна истој основици *AB* и једнака половини њене дужине. Према томе је *MN* || *PQ* *MN* = *PQ*. Унакрсни углови у тјемену *T* троуглова *MNT* и *PQT* су једнаки



па из става УСУ слиједи $\Delta MNT \cong \Delta PQT$, па је *PT* = *TN* и *QT* = *TM*. Како је *P* средина дужи *AT* и *Q* средина *BT*, то тачка *T* дјели сваку од тежишница у односу 2:1 почев од тјемена *A* односно *B*.

2. Тежишнице *AN* и *BM* троугла *ABC* сијеку се у тачки *T*. Претпоставимо да трећа тежишница *CP* сијече тежишницу *BM* у тачки *S* различитој од *T*, као на слици лијево. Према претходном разматрању, *BS* = 2·*SM*, па је $BS = \frac{2}{3}BM$. Из истог разлога, *BT* = 2·*TM* и $BT = \frac{2}{3}BM$. Добили смо *BS* = *BT*, што је контрадикција са претпоставком да су *S* и *T* двије разне тачке. Дакле, дуж *CP* садржи тачку *T*, што је и требало доказати.♦



Задаци 11.4.5.

1. Изразити угао који образује основица и висина на крак једнакокраког троугла у функцији угла између крака.

2. Доказати да висина на крак једнакокраког троугла није симетрала тог угла.

3. Доказати да симетрала угла троугла дијели наспрамну страницу на двије дужи тако да је свака мања од њој ближе странице троугла.

4. Тачка *D* је средина основице *AB* једанкокраког троугла *ABC*. Тачка *E* је на краку *BC* таква да је *DE* ⊥ *BC*. Тачка *F* је средина дужи *DE*. Доказати *AE* ⊥ *CF*.

[Средња линија *CD* је и висина. Ако је *G* средина дужи *BE* тада је *GE* средња линија троугла *BED* па је *GF* || *BD*, и *GF* ⊥ *CD*. Тачка *F* је ортоцентар троугла *CDG*, пресјек висина *DE* и *GF*. Према томе, *CF* је трећа висина и *CF* ⊥ *DG*. Такође, *DG* је средња линија троугла *ABE* одакле *AE* || *DG* и *AE* ⊥ *CF*.]

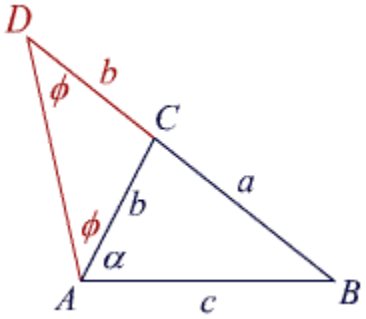
11.5. Неједнакост троугла

Већ смо доказали да је наспрам веће стране већи угао троугла и обратно (теореме 10.1.6. и 7.). Овдје настављамо ту линију дедукције са једном важном теоремом

која се у настави геометрије понекад узима као полазна особина троуглова, аксиома.

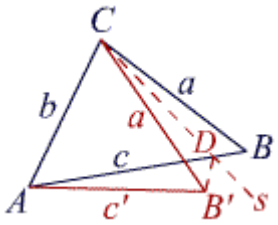
Теорема 11.5.1. (О неједнакости троугла) У сваком троуглу је било која његова страница мања од збира остале двије, а већа од њихове разлике.

Доказ: Продужимо страницу BC троугла ABC тако да је D-B-C и $DC = CA = b$, као на слици десно. Троугао ACD је једнакокрак гдје $\angle DAC = \angle ADC = \phi$. Углови $\angle BAC = \alpha$ и ϕ су сусједни, па је $\phi < \angle BAD$, те је $\angle BDA < \angle BAD$. Како наспрам већег угла лежи дужа страница троугла (теорем 10.1.7.) биће $AB < BD$, тј. $c < a + b$. Слично се доказује $a < b + c$ и $b < a + c$.



Из $c < a + b$ слиједи $c - a < b$, $c - b < a$. Слично добијамо и остале неједнакости. Уопште, добијамо $|a - b| < c < a + b$, гдје су a, b и c произвољне странице троугла (странице произвољног троугла). Када су тјемена „троугла“ колинеарна, тада ове неједнакости постају једнакости. ♦

Примјер 11.5.2. Доказати да за два троугла, из $a = a'$, $b = b'$ и $\gamma > \gamma'$ слиједи $c > c'$.



Доказ: На сљедећој слици видимо оба троугла тако да је $A = A'$ и $C = C'$, па је према услову задатка страница CB' унутар угла γ. Нека је s симетрала угла BCB' која сијече страницу AB у тачки D. Из $\Delta DCB \cong \Delta DCB'$ (став сус), то је $DB = DB'$. Затим, према неједнакости троугла имамо $AD + DB' > AB'$, па је $AB > AB'$. ♦

Примјер 11.5.3. Доказати да за два троугла, из $a = a'$, $b = b'$ и $c > c'$ слиједи $\gamma > \gamma'$.

Доказ: За углове у тјемену C односно C' вриједи: $\gamma = \gamma'$, $\gamma < \gamma'$, или $\gamma > \gamma'$. 1) ако је $\gamma = \gamma'$, тада је $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$, па је $c = c'$, а то је супротно претпоставци задатка. 2) $\gamma < \gamma'$ противрјечи импликацији 11.2.2. 3) $\gamma > \gamma'$ је једина преостала могућност. ♦

Задаци 11.5.4.

1. Доказати да је висина троугла мања од обе странице између којих се налази.

2. Доказати да је збир висина троугла мањи од његовог обима.

3. Доказати да је центар уписаног круга у троуглу најближи тјемену највећег угла.

[Тачка O у троуглу ABC је тај центар и рецимо $\alpha \le \beta \le \gamma$. Тада, ΔABO: $\alpha/2 \le \beta/2$ па је $BO \le AO$, ΔBOC: $\beta/2 < \gamma/2$ па је $CO < BO$. Дакле, најкраћа је дуж CO.]

4. Доказати да је свака страница троугла мања од полуобима троугла.

5. Доказати да је свака тежишница троугла мања од полузбира страница између којих се налази.

6. Доказати да је свака тежишница троугла мања од његовог полуобима.

[из $t_c < b + c/2$ и $t_c < a + c/2$]

7. Збир тежишних дужи већи је од полуобима, а мањи од обима троугла. Доказати.

8. Доказати да је збир тежишних дужи троугла већи од ¾ његовог обима.

9. Доказати:
а) највећа страница троугла већа је од трећине његовог обима;
б) најмања страница троугла мања је од трећине његовог обима.

10. У унутрашњости троугла ABC је произвољна тачка M. Доказати:
а) $\angle ACB < \angle AMB$; **б)** $AM + MB < AC + CB$.

11. У унутрашњости троугла ABC је произвољна тачка M. Доказати:
$s < AM + BM + CM < a + b + c$, гдје су a, b и c странице троугла, а s полуобим.

IV Симетрије

Симетрија је пресликавање фигура у геометрији.

У ужем смислу, геометријска симетрија је особина симетричности фигуре, у односу на тачку, у односу на праву (&13), или у односу на раван (рефлексија). Трансформације сличности су такође врста симетрија коју овдје обрађујемо (&14.).

У ширем смислу, симетрија (грчки: "συμμετρεῖν" – исте мјере) значи било који утисак хармоничног, естетског склада. Посебно у математици, ту су и афине трансформације, Мобиусове трансформације из пројективне геометрије, или на примјер симетрије група из области алгебре, које овдје не обрађујемо.

12. Конструкције

Геометријска конструкција је цртеж добијен коришћењем шестара и лењира[2].

Тачније, лењира без подјеле.

Основни конструктивни задаци су они на које се своде сложеније конструкције. Ови су нам познати из основне школе:

Окз1: Преношење дужине;
Окз2: Преношење угла;
Окз3: Конструкција симетрале дужи;
Окз4: Конструкција симетрале угла;
Окз5: Конструкција паралеле датој правој кроз дату тачку;
Окз6: Конструкција нормале на дату праву кроз дату тачку.

Основним геометријским конструкцијама често називамо и сљедеће:

- Дјељење дужи у датој размјери;
- Конструкција (С-С-С) троугла када су дате његове странице;
- Конструкција (С-У-С) троугла коме су задате двије странице и угао захваћен њима;
- Конструкција (У-С-У) троугла са дата два угла и страницом између;
- Конструкција (У-С-С) троугла са датим једним углом и двије странице.

Рјешење конструктивног задатка је сваки лик који задовољава дате услове, а **рјешити** конструктивни задатак значи свести га на коначан број основних конструкција, или већ рјешених задатака. Конструктивни задатак може бити: преодређен, одређен, вишезначан, једнозначан, рјешив, нерјешив, могућ, или немогућ.

Разликујемо четири фазе рјешавања конструктивног задатка:

[2] Платон (429-384. г.п.н.е.): „Геометријско конструисање је цртање неке фигуре помоћу коначног броја конструкција правих и кружница.“

- **Анализа** конструкције, када тражимо начин рјешавања;
- **Конструкција**, након проведене анализе;
- **Доказ**, да добијени лик задовољава почетне услове и да је сваки корак конструкције могућ;
- **Дискусија**, расправа о могућности извођења на одабрани начин и о броју рјешења у зависности од датих елемената.

Да постоје и нерјешиви конструктивни задаци познато је још из времена античке грчке геометрије. Три таква су до недавно била предмет нарочитих расправа и сумњи. То су:

- **Квадратура круга**. Дат је круг, конструисати квадрат једнаке површине.
- **Трисекција угла**. Дат је угао, конструисати његову трећину.
- **Удвостручавање коцке**. Дата је ивица коцке, конструисати ивицу коцке двоструке површине.

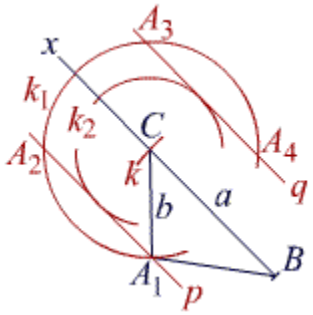
12.1. Конструкција троугла

Примјер 12.1.1. Конструисати троугао ако су дати a, b и h_a, двије странице и висина на прву.

Анализа. Скицирајте (неки) троугао ABC. Када пренесемо дужину a, имамо врхове B и C троугла. Тећи врх A мораће бити удаљен од тачке C за дужину b, од странице BC за дужину h_a.

Користићемо тзв. методу пресјека, прво пресјек кружнице $k(B,a)$ са центром у тачки B и полупречником a са полуправом Bx која садржи страницу BC.

Конструкција.
Страница BC : полуправа Bx; тачка $C = Bx \cap k(B,a)$.
Кружница $k_1(C,b)$.
Нормала n на BC у тачки C; тачке $P, Q \in n \cap k_2(C, h_a)$.
Праве p и q кроз тачке P и Q паралелне са правом BC.
Врх A: $p \cap k_1(C,b)$, односно $q \cap k_1(C,b)$, ако пресјеци постоје.
Рјешења су ΔA_iBC (i = 1, 2, 3, 4 евентуално), као на сљедећој слици.

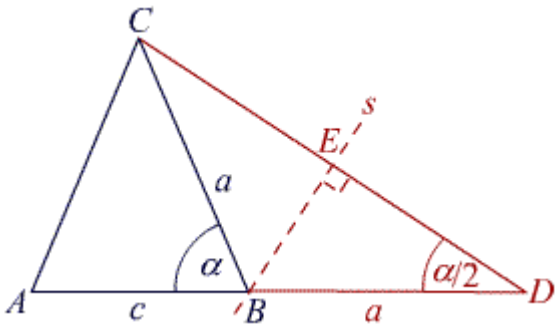


Доказ је на основу анализе очигледан.

Дискусија. Задатак нема, односно има 2, или 4 рјешења, зависно од тога да ли је $b < h_a$, $b = h_a$, или $b > h_a$. На претходној слици је приказан овај посљедњи случај. ♦

Примјер 12.1.2. Конструисати једанкокраки троугао ако је дат његов угао на основици и збир основице и крака. Дат је угао α и дуж $a + c$.

Анализа. Претпоставимо да је задатак рјешен и да је тражени једанкокраки троугао ABC, на слици десно.
Продужимо основицу AB преко B за дужину крака до тачке D. Добијамо A-B-D, $AD = c + a$. Троугао BDC је једанкокрак и симетрала s његове основице DC пролази кроз тачку B.



Користимо тзв. методу помоћног лика, овдје троугла ADC, који олакшава тражену конструкцију.

Конструкција. Конструишемо троугао ADC, користећи дате елементе.
Конструишемо симетралу $s(D,C)$ странице DC.
Тачка $B = AD \cap s$.
Добили смо једнакокраки ΔABC.

Доказ. Како је s симетрала странице DC троугла ADC, троугао BDC је једнакокраки, са спољашњим углом α и $\angle D = \alpha/2$. Затим, $AD = AB + BD = c + a$, а због $BD = BC = a$, биће $AB + BC = a + c$.

Дискусија. Дати елементи α, $a + c$, $\alpha/2$ дефинишу само један помоћни троугао ADC (став УСУ подударности). Симетрала s сјече страницу AD у само једној тачки B, када је $\alpha < 90°$ и тада овај задатак има тачно једно рјешење. Случај $\alpha \geq 90°$ нема рјешења већ и зато што углови на основици једнакокраког троугла не могу бити већи од правог угла. ♦

Задаци 12.1.3.
1. Конструисати троугао ако су дате двије његове висине и угао између њих. Дате су h_a, h_b и α.

2. Конструисати троугао ако су дати висина, тежишница и угао на исту страницу. Дати су h_b, t_b и α.

3. Конструисати троугао ако су дате двије његове странице и тежишница између њих. Дато је a, b и t_c.

4. Конструисати троугао ако су дате његове три тежишнице. Дато је t_a, t_b, t_c.

5. Конструисати троугао ако је дата једна страница, висина и тежишна дуж која одговара тој страници. Дати су $AB = c$, h_c и t_c троугла ABC.

6. Конструисати троугао ако су дате двије његове странице и висина која полази из истог врха. Дати су $AC = b$, $BC = c$ и h_a троугла ABC.

7. Конструисати једнакостраничан троугао ако су дати:
а) збир странице и висине; **б)** разлика странице и висине.

8. Конструисати троугао задат елементима:
а) $c - a$, b, α $(c > a)$; **б)** $b - c$, α, h_b $(b > c)$;
в) $b + c$, h_b, α; **г)** $a + c$, b, β.

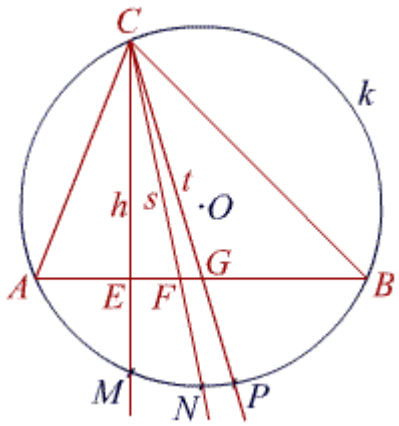
9. Конструисати троугао ако је дата једна његова страница, разлика углова на њој и разлика друге и треће странице. Дато је a, $b - c$ и $\beta - \gamma$.

10. Конструисати правоугли троугао датог обима и висине која одговара хипотенузи.

12.2. Конструкције равних фигура

Примјер 12.2.1. Конструисати троугао уписан у дату кружницу тако да његова висина, симетрала унутрашњег угла и тежишница које полазе из истог тјемена троугла, пролазе кроз три дате тачке на кружници[3].

Рјешење. *Анализа*: Дата је кружница k и на њој тачке M, N и P. Нека је ABC тражени труогао уписан у дати круг, тако да висина $CE = h$ пролази тачком M, симетрала $CF = s$ тачком N, а тежишна линија $CG = t$ пролази кроз P, на слици лијево.



Како је CN симетрала угла $\angle ACB$ то су једнаки лукови $AN = NB$. Са друге стране, нормала на страницу AB у тачки G такође полови лук ANB. Према томе тачке O, G и N леже на истој правој.

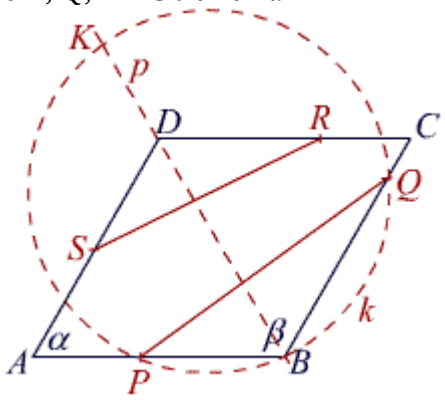
Конструкција: Кроз тачку M повучемо паралелу h са ON. Тачка $C = h \cap k$. Тачка $G = CP \cap ON$. Конструишемо нормалу AB кроз тачку G на праву ON. Добили смо ΔABC.

Дискусија: Задатак има рјешење ако и само ако: тангента на кружницу k у тачки M није паралелна са NO, тачке M и P леже са разних страна праве NO, али не на једном пречнику дате кружнице. ♦

Примјер 12.2.2. Дате су четири произвољне тачке (у равни). Конструисати ромб са заданим оштрим углом α, тако да праве на којима леже стране ромба пролазе свака кроз једну од заданих тачака.

[3] Такмичење у БиХ, 1960.

Рјешење. *Анализа*: На сљедећој слици, дате тачке P, Q, R и S леже на страницама AB, BC, CD и DA ромба, коме је дати угао α у тјемену A. У тјемену B ромба је суплементни угао $\beta = 180° - \alpha$. Из сваке тачке лука k се тетива PQ види под истим углом β, што значи да се са друге стране те кружнице иста тетива види под суплементним углом α. Права p на којој лежи дијагонала BD траженог ромба сјече круг k на средини лука PQ у тачки K.



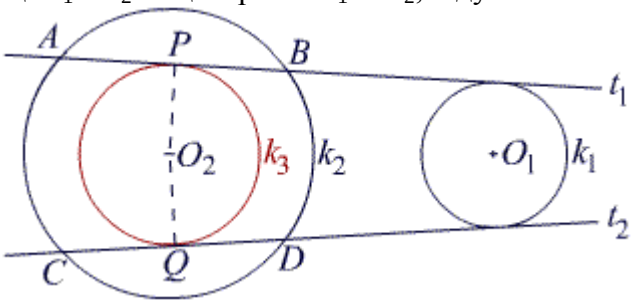
Конструкција: Дужи SR и PQ. Кружницу k чија тетива PQ се са једне стране види под углом β због чега се са друге стране иста тетива види под углом α. Тачку K која је средина лука PQ углова α. Кружницу l чија тетива RS се са једне стране види под углом β а са друге стране под углом α. Тачку L која је средина лука RS углова α. Праву p кроз K и L. $D = k \cap p$, $B = l \cap p$. Праве кроз DR, DS, BP и BQ. Тачке A и C су пресјеци правих DS са BP и DR са BQ.

Доказ: Из једанкости лукова $PK = QK$ слиједи једнакост углова $\angle PBK = \angle CBK$, тј. BK је симетрала угла $\angle ABC$. Аналогно, DL је симетрала угла $\angle ADC$. Дакле, BD је симетрала наспрамних једнаких (конгруентних) углова па је четвороугао $ABCD$ ромб.

Дискусија: Задатак може имати дванаест рјешења. Наиме, ако уочимо један угао ромба можемо учинити да су на супротним странама ромба распоређене тачке S и Q или S и R или S и P, одакле добијамо шест рјешења. Када су углови α и β различити све можемо поновити за други угао. Када је $\alpha = \beta$ добијамо квадрат, када задатак може имати шест рјешења; ако се тачке K и L поклопе онда задатак има произвољан број рјешења. ♦

Примјер 12.2.3. Дате су двије кружнице (у истој равни) и дужина. Конструисати тангенте на прву кружницу које на другој одсјецају тетиве задате дужине[4].

Рјешење. *Анализа*: Дате су кружнице k_1 и k_2 са центрима O_1 и O_2, и дужина d. На слици десно, тангенте t_1 и t_2 на прву кружницу, на другој одсјецају тетиве $AB = d$ и $CD = d$. Из другог центра повучене су нормале O_2P и O_2Q на тангенте. Кружница k_3 има центар у O_2 и полупречник $O_2P = O_2Q$.



[4] Прво републичко такмичење из математике за ученике средњих школа у Босни и Херцеговини одржано у прољеће 1959.

Конструкција: Конструишите било коју тетиву дужине d у кружници k_2. Из O_2 спустите нормалу на тетиву. Дужина нормале је полупречник круга k_3 са центром у O_2. Затим, конструишите заједничке тангенте кружница k_1 и k_3.

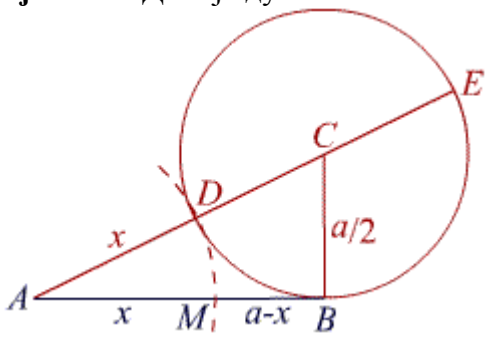
Дискусија: У случају да се кругови не додирују, као на претходној слици, имамо сљедећа три случаја. Ако је дата дужина (d) већа од пречника другог круга (O_2) задатак нема рјешења. Ако је дата дужина једнака пречнику другог круга онда задатак има два рјешења, двије тангенте на први круг које пролазе центром другог. Ако је дата дужина мања од пречника другог круга онда задатак има четири рјешења, четири заједничке тангенте на пар кругова k_1 и k_3.

У случајевима да се кружнице додирују извана, или изнутра и у случају да један од датих кругова сасвим унутар другог имамо другачије бројеве рјешења. Које? ♦

Златни пресјек је подјела дужи на два дијела тако да се цијела дуж према већем дијелу односи као већи дио према мањем.

Примјер 12.2.4. Дату дуж подјелити у златном пресјеку.

Рјешење. Дата је дуж $AB = a$. Конструишимо троугао ABC са правим углом у тачки B са катетом $BC = a/2$, затим кружницу са центром C полупречника $a/2$, као на слици лијево. Хипотенуза AC сјече кружницу у тачкама D и E. Пречник кружнице је $DE = a$. Затим, пренесимо дужину AD на дату дуж. Добијамо $AM = AD = x$, $M \in AB$ и M дјели дату дуж у златном пресјеку $x : (a - x)$.



Доказ. Из Питагорине теореме $AB^2 + BC^2 = AC^2$ имамо $a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$, затим $x^2 = a(a - x)$, те $a : x = x : (a - x)$. ♦

Задаци 12.2.5.

1. Конструисати правоугли троугао ако су дати дужина хипотенузе и висина на хипотенузу.

2. Конструисати ромб ако су му дате дијагонале.

3. Конструисати једанкокраки трапез ако су му дате основице и крак.

4. Конструисати квадрат ако су дати:
а) збир странице и дијагонале; **б)** разлика странице и дијагонале.

5. Конструисати правоугаоник ако су дати:

а) разлика страница и дијагонала; **б)** збир страница и дијагонала.

6. Конструисати паралелограм ако су дати:
а) странице и висина на страницу; **б)** дијагонале и висина на страницу.

7. Конструисати тангенте на дати круг које су:
а) паралелне датој правој; **б)** нормалне на дату праву.

8. Дати су круг и тачка. Конструисати геометријско мјесто средишта тетива круга које су на правама које пролазе кроз дату тачку.

9. Дат је круг k и дуж d ($d < k$). Конструисати скуп средишта свих тетива круга k дужине d.

10. Дати су круг, тачка на кругу и тачка ван круга. Конструисати круг који додирује дати круг у датој тачки и другу дату тачку.

13. Изометрије

Раздаљинска функција је придруживање броја m пару тачака A, B из равни α. Формулом:

$$(\forall A,B \in \alpha)(\exists!\ m \in \mathbf{R} \wedge m \geq 0)\ \mathrm{d}(A,B) = m.$$

Другим рјечима, за сваки пар тачака A и B из равни α постоји тачно један ненегативан реални број m такав да је растојање између тих тачака $\mathrm{d}(A,B)$ једнако броју m. Кажемо да је број m мјера удаљености тачака A и B.

За раздаљинску функцију важе аксиоме:

1. $\mathrm{d}(A,A) = 0$;
2. $\mathrm{d}(A,B) = \mathrm{d}(B,A)$;
3. $\mathrm{d}(A,B) \leq \mathrm{d}(A,C) + \mathrm{d}(C,B)$.

A, B и C су произвољне тачке дате равни. Посљедња (3) назива се и неједнакост троугла.

Изометрија дословно значи исто мјерење. Слободније речено, то је пресликавање фигуре при којем се не мјењају удаљености (произвољних) парова тачака. Формулом:

$$(f : \alpha \to \alpha) : \mathrm{d}(A,B) = \mathrm{d}(f(A),f(B)),$$

за сваки пар тачака A и B из равни α. Ту су $f(A)$ и $f(B)$ копије оригиналних тачака A и B, док су бројеви $\mathrm{d}(A,B)$ и $\mathrm{d}(f(A),f(B))$ мјере, раздаљине редом оригинала и копија.

Сталном тачком, фиксном тачком изометрије f равни α зовемо сваку тачку $A \in \alpha$ за коју је $f(A) = A$.

Особине изометрије су дјелом очигледне. Изометријом:

1) дуж се пресликава у дуж исте дужине, тачка на средини дужи се пресликава у тачку на средини дужи;
2) полуправа се пресликава у полуправу, почетак полуправе се пресликава у почетак;
3) права се пресликава у праву;
4) паралелне праве се пресликавају у паралелне праве;
5) кружница се пресликава у кружницу једнаког полупречника;
6) угао се пресликава у једанк угао.
7) Изометријско пресликавање је бијекција.

13.1. Осна симетрија

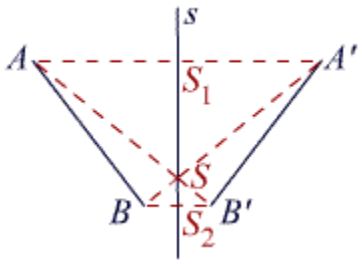
Осно симетричне тачке A и A' у односу на праву p као осу су оне и само оне којима је права p нормална на дуж AA' у њеном средишту.

Осна симетрија, или **рефлексија** је пресликавање $S_s : \alpha \to \alpha$ којим се свакој тачки A равни α придружује њој осно симетрична тачка A' те равни у односу на неку осу симетрије s из те равни.

Теорема 13.1.1. Осна симетрија је изометрија.

Доказ: Дата је дуж AB, симетричне слике $A'B'$ и оса симетрије s, на сљедећој слици. Тиме је дефинисана осна симетрија

$$S_s : AB \to A'B'.$$



Требамо доказати да су дужине оригиналне дужи AB и копије $A'B'$ једнаке, тј. да је $d(A,B) = d(A',B')$.

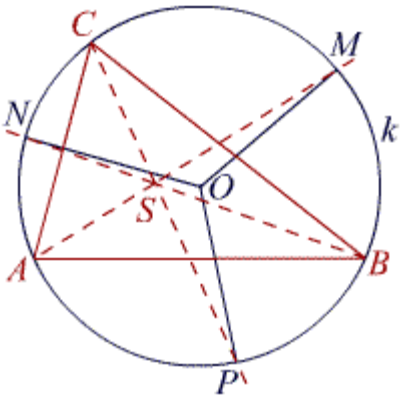
Пресјеци дужи AB', AA' и BB' са осом s су тачке S, S_1 и S_2. Према СУС биће $\Delta ASS_1 \cong \Delta A'SS_1$ и $\Delta BSS_2 \cong \Delta B'SS_2$ одакле $SA = SA'$ и $SB = SB'$. Сада, према СУС имамо $\Delta SAB \cong \Delta SA'B'$ одакле $AB = A'B'$.♦

Примјер 13.1.2. Конструисати троугао ако су дате тачке којима симетрале његових углова сијеку кружницу описану око тог троугла[5].

Рјешење. *Анализа*: Нека су M, N и P тачке у којима симетрале углова α, β и γ

[5] Десето такмичење у БиХ, 1968.

сјеку кружницу k са центром O описану око троугла ABC. Пресјек симетрала тих углова AM, BN и CP је тачка S, средиште уписаног круга троугла – на слици десно.



$\angle CAM = \angle BAM \Rightarrow CM = BM \wedge \mathrm{OM} \perp \mathrm{BC}$.
$\angle CBN = \angle ABN \Rightarrow CN = AN \wedge ON \perp AC$.
$\angle ACP = \angle BCP \Rightarrow AP = BP \wedge OP \perp AB$.

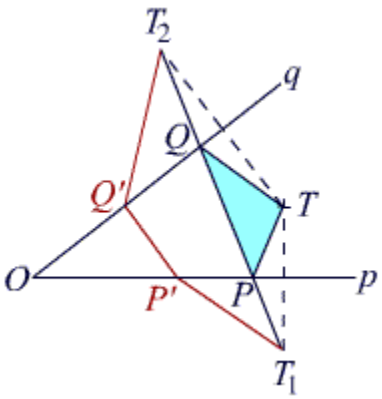
Из претходног слиједи $\angle BAC = 180° - \angle NOP$, јер су ово углови са окомитим крацима. Дакле, угао
$\angle BAC$ је познат а тиме и $\angle BOC = 2\angle BAC$.

Конструкција: Дужи OM, ON и OP. Угао α напоредан са $\angle NOP$. Полуправа OC тако да је $\angle MOC = \alpha$. B симетрично са C у односу на OM. A симетрично на C у односу на ON.

Доказ: Непосредно из конструкције слиједи да су AM, BN и CP симетрале одговарајућих углова. Наиме, из B симетрично са C у односу на OM слиједи $OM \perp BC$. Одатле $CM = BM$, тј. $\angle CAM = \angle BAM$ што значи да је AM симетрала угла $\alpha = \angle CAB$. Аналогно доказ за остале.

Дискусија: Када год су дате три различите тачке M, N и P у равни које не леже на истој правој, задатак има јединствено рјешење. ♦

Примјер 13.1.3. Дат је оштар угао Opq и у њему тачка T. Конструисати тачке $P \in p$ и $Q \in q$ такве да обим троугла PQT буде најмањи.



Рјешење: T_1 и T_2 су осно симетричне слике тачке T у односу на осе p и q, као на слици лијево. Пресјеци праве T_1T_2 са полуправама p и q су тачке P и Q. Имамо троугао PQT.

Обим овог троугла је $TP + PQ + QT = T_1P + PQ + QT_2 = T_1T_2$. То је мање од произвољног другог троугла, нпр. $TP' + P'Q' + Q'T = T_1P' + P'Q' + Q'T_2$ јер је праволинијска дуж T_1PQT_2 краћа од изломљене $T_1P'Q'T_2$. ♦

Осна симетрија, тј. рефлексија је **индиректна симетрија**. Другим рјечима, троугао позитивне орјентације пресликава се у троугао негативне орјентације и обратно. **Раванска симетрија**, тј. раванска рефлексија подсјећа на одсликавање лика у равном огледалу и то је такође индиректна симетрија: лијева страна се одсликава у десну и обратно.

Задаци 13.1.4.
1. Одредити осе симетрије фигуре коју образују:
а) двије праве; **б)** права и кружница; **в)** двије кружнице.

2. Конструисати симетричну слику дате дужи AB у односу на дату осу симетрије s. Разликовати случајеве:
а) тачке A и B су са исте стране осе s; **б)** тачке A и B су са разних страна осе s.

3. Конструисати троугао ако је дато: **а)** a, h_b, $b + c$; **б)** c, h_a, $a + c$.

4. Конструисати ромб ако му једна дијагонала има дату дужину d и припада датој правој a, а крајеви друге дијагонале припадају:
а) двијема датим правама b и c;
б) датој правој p и кружници k;
в) двијема датим кружницама k_1 и k_2.

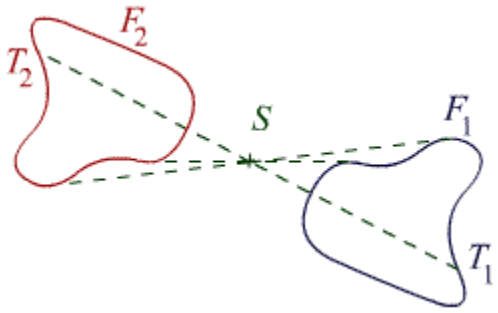
5. Дате су двије тачке A и B и права p. У истој равни наћи тачку $P \in p$ такву да је пут изломљене линије APB најкраћи.

6. У једнакокраком троуглу ABC је $AC = BC$ и $AB = c$. Симетрала странице AC у тачки D пролази краком BC тачком E. Обим троугла ABE је $3c$. Наћи обим троугла ABC.

13.2. Централна симетрија

Дефиниција 13.2.1. Двије тачке, A и B су симетричне према некој тачки S ако је она средиште дужи AB, као на слици десно. Пишемо $S_S : A \to B$ и кажемо: тачка A је централно симетрично пресликана у тачку B у односу на центар симетрије S.

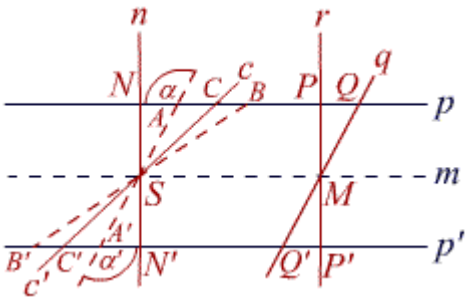
Дефиниција 13.2.2. Двије фигуре F_1 и F_2 су симетричне према тачки S, ако свакој тачки T_1 прве фигуре одговара симетрична тачка T_2 друге фигуре према истом центу симетрије S, као на слици лијево.



За двије фигуре које су симетричне према некој тачки кажемо да су централно симетричне.

Теорема 13.2.3.
а) Фигура симетрична са датом правом p према датој тачки $S \notin p$ је права p' паралелна са правом p;
б) Скуп средишта M свих дужи QQ' чији крајеви Q и Q' припадају правама p и p' је права $m \| p$ (и такође $m \| p'$).

Доказ: а) Нека је тачка A' симетрична тачки $A \in p$ са центром симетрије S, а тачка B' симетрична тачки $B \in p$ према истој тачки S, и нека је p' права одређена тачкама A' и B', као на слици десно.

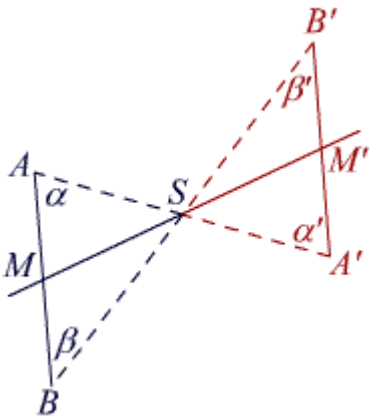


Из $AS = SA'$, $BS = SB'$ и $\angle ASB = \angle A'SB'$ слиједи $\Delta SAB \cong \Delta SA'B'$ по ставу СУС, одакле слиједи $\alpha = \alpha'$. Међутим, како су ови углови наизмјенични, закључујемо да је $p \| p'$.
Нека права c пролази тачком S и сијече праве p и p' у тачкама C и C', као на датој слици, горе десно. По ставу УСУ је $\Delta ASC \cong \Delta A'SC'$ па је $CS = SC'$, што значи да су тачке C и C' симетричне према тачки S. Због произвољног избора праве c, праве p и p' су симетричне према тачки S.
б) Ако је права $n \perp p$ у тачки N, тада је $n \perp p'$ у некој тачки N'. По ставу УСУ је $\Delta SAN \cong \Delta SA'N'$, одакле је $NS = SN'$, тј. одстојања тачке S од правих p и p' су једнака. Нека су Q и Q' пресјеци произвољне праве q са правама p и p', затим нека је тачка M средиште дужи QQ' и S, $M \in m$. Тада су тачке Q и Q' симетричне према тачки M. Ако права $r \perp p$ у тачки P пролази тачком M онда је такође $r \perp p'$ у некој тачки P'.па је $PM = MP'$. Како је четвороугао $NN'PP'$ паралелограм, и такође $NSMP$ то је $SM = NP$ и $SM \| NP$, тј. $m \| p$.♦

Посљедице 13.2.4. а) Сваке двије паралелне праве су централно симетричне.
б) Паралелне праве имају неограничено много центара симетрије. Скуп свих тих центара симетрије је права која садржи средишта било које двије дужи чији крајеви припадају овим правама.
в) Централна симетрија пресликава сваку осу у осу паралелну и супротног смијера са датом.

Теорема 13.2.5. Двије дужи су централно симетричне према једној тачки ако и само ако су паралелне и подударне (једнаке дужине).

Доказ: Услов је неопходан. Ако су двије дужи AB и $A'B'$ централно симетричне у односу на центар S онда су ове дужи паралелне и подударне. Наиме, из $AS = SA'$ и $SB = SB'$, а због $\angle ASB = \angle A'SB'$ слиједи $\Delta SAB \cong \Delta SA'B'$ те $AB = A'B'$ и $\alpha = \alpha'$ одакле $AB \| A'B'$, као што се види на слици лијево.



Услов је довољан. Ако су дужи AB и $A'B'$ паралелне и подударне, тада су оне централно симетричне према једном центру S. Наиме, имамо паралелне праве AB и $A'B'$ које леже у једној равни и према томе праве AA' и BB' сијеку се у некој тачки S. Даље, како је и $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, то је

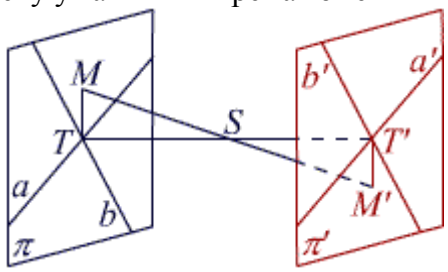
$\Delta SAB \cong \Delta SA'B'$ што значи да су крајеви датих дужи централно симетрични према тачки S.♦

Другим ријечима, четвороугао има пар паралелних и једнаких страна (паралелограм) ако и само ако му се дијагонале полове.

Посљедица 13.2.6. Ако су крајеви две дужи симетричне према некој тачки тада су и саме дужи симетричне према тој тачки.

Теорема 13.2.7. Дата раван се према датом центру симетрије ван те равни пресликава у паралелну раван.

Доказ: На слици доле десно, праве a, b које се сјеку у тачки T и према томе леже у једној равни π, симетричне су правама a', $b' \in \pi'$ према центру симетрије S. Биће $a' \cap b' = T' \in \pi'$ и такође $a \parallel a'$, $b \parallel b'$. Нека је произвољна тачка $M \in \pi$ и $M\text{-}S\text{-}M'$ где је $M' \in S$. Због $\Delta STM \cong \Delta ST'M'$ биће $MS = SM'$, тј. тачке M и M' су централно симетричне према тачки S.♦



Теорема 13.2.8. Централно симетричне фигуре су подударне. Централна симетрија је изометрија.

Доказ: Произвољне двије тачке A, B прве фигуре Φ у односу на центар S имају симетричне слике A', B' у другој фигури Φ'. Према ставу подударности СУС имамо $\Delta ASB \cong \Delta A'SB'$ одакле $AB \cong A'B'$. Према томе, централна симетрија је изометрија.♦

Задаци 13.2.9.
1. Колико центара симетрије има сљедећа равна фигура:
а) двије праве (1. паралелне; 2. које се сјеку);
б) права и кружница (1. које се сјеку; 2. које се додирују; 3. мимоилазне);
в) двије кружнице (1. концентричне; 2. које се сјеку; 3. не сјеку се).

2. Конструисати дуж са средиштем у датој тачки и крајевима на:
а) двије дате праве; **б)** датој правој и кружници; **в)** двије дате кружнице.

3) Конструисати правоугаоник чија је једна страна два пута већа од друге, ако је дата једна тачка на краћој страни, затим дата је тачка на средини између две дуже стране и по једна тачка на тим, дужим странама.

4) Дата су два круга која се сјеку. Кроз једну од тачака пресјека конструисати праву која на овим круговима одсјеца једнаке тетиве.

5) Конструисати троугао ако су дате све три тежишне линије.

6) Дат је праралелограм $ABCD$. На продужецима његових страница конструисане су тачке A_1, B_1, C_1 и D_1 такве да су тјемена B, C, D и A средишта дужи AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1. Доказати да је четвороугао $A_1B_1C_1D_1$ такође паралелограм.

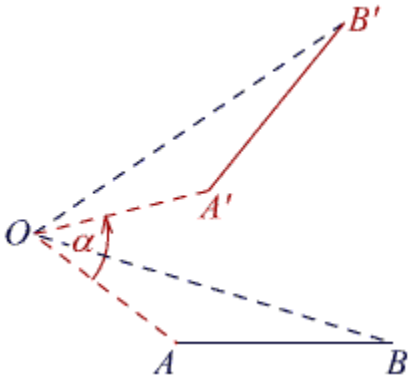
13.3. Ротација

Ротација равни π око тачке O те равни за угао α је пресликавање $S_\alpha : \pi \to \pi$ које свакој тачки M те равни придружује тачно једну тачку M' те равни тако да је $\angle MOM' = \alpha$ и $OM = OM'$. Тада пишемо $S_{O,\alpha} : M \to M'$.

Угао ($\alpha = \angle aOb$) је орјентисан, тј. краке (Oa и Ob) угла сматрамо уређеним паром и обиљежавамо га и са $\angle(a, b)$. Позитивна орјентација је обрнута смјеру казаљке на сату.

Теорема 13.3.1. Ротација је изометријска трансформација.

Доказ: У равни је дата произвољна дуж $AB \in \pi$, центар ротације $O \in \pi$ и орјентисан угао α, као на слици лијево. Према дефиницији ротације имамо:



$\angle AOA' = \alpha$ и $OA = OA'$,
$\angle BOB' = \alpha$ и $OB = OB'$.

Отуда $\Delta AOB \cong \Delta A'OB'$ па $AB = A'B'$. Дакле растојање двије (произвољне) тачке A и B не мјења се након ротације. ♦

Посљедица ове теореме јесте да се права ротацијом пресликава у праву, угао се пресликава у једнак угао, троугао се пресликава у подударан троугао.

Задаци 13.3.2.
1. Дату дуж ротирати око тачке O за угао α: **а)** $\alpha = 30°$; **б)** $\alpha = 45°$; **в)** $\alpha = 60°$.

2. Дати троугао ротирати око дате тачке за угао $\alpha = 120°$.

3. Конструисати једнакокраки троугао чији врхови основице припадају датим паралелним правама а врх наспрам основице је између тих правих. Угао троугла наспрам основице је 30°.

4. Конструисати квадрат чија три тјемена припадају трима датим паралелним правама.

5. Конструисати једнакостранични троугао чија тјемена припадају трима концентричним кружницама.

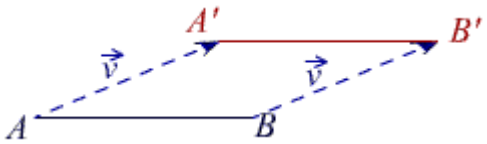
6. Конструисати кружницу са центром у датој тачки, такву да се лук кружнице између двије дате праве види под датим углом.

13.4. Транслација

Транслација равни π у саму себе је пресликавање $S_{\vec{v}} : \pi \to \pi$ које свакој тачки M равни придружује тачно једну тачку M' те равни, тако да је вектор $\overrightarrow{MM'}$ једнак датом вектору $\vec{v}$ који називамо и **вектор транслације**. Пишемо и $S_{\vec{v}} = M \to M'$.

Теорема 13.4.1. Транслација је изометријско пресликавање.

Доказ: Нека је дат произвољан вектор транслације $\vec{v}$ као на сљедећој слици. За произвољне тачке A и B имамо $S_{\vec{v}} : AB \to A'B'$, те имамо паралелограм ABB'A', односно да транслација чува удаљеност, тј. транслација је изометрија. ♦



Задаци 13.4.2.
1. Транслирати за дати вектор: **а)** круг; **б)** троугао.

2. Дат су угао aOb, права p и дуж d. Конструисати праву $q \parallel p$ тако да њен одсјечак између кракова угла буде једнак d.

3. Дате су кружнице $k_1(C_1, r_1)$ и $k_2(C_2, r_2)$, $r_1 \neq r_2$ и дуж d. Конструисати дуж $AB = d$ тако да $A \in k_1$, $B \in k_2$ и $AB \parallel C_1C_2$.

4. Дате су двије паралелне праве и тачка између њих. Конструисати кружницу која додирује дате праве и садржи дату тачку.

5. Дата је дуж AB, права p и кружница k. Конструисати тачке $C \in k$ и $D \in p$ тако да је четвороугао $ABCD$ паралелограм.

6. У једнакокраком трапезу се дијагонале сијеку под правим углом. Доказати да је висина трапеза једнака средњој линији тог трапеза.
[Транслирати једну дијагоналу за крађу основицу. Добијени правоугли троугао је пола квадрата.]

14. Сличност

Пресликавање сличности фигуре Φ у фигуру Φ' сваком пару тачака $A, B \in \Phi$ придружује (кореспондира) пар тачака $A', B' \in \Phi'$, тако да је количник $AB : A'B'$ константан.

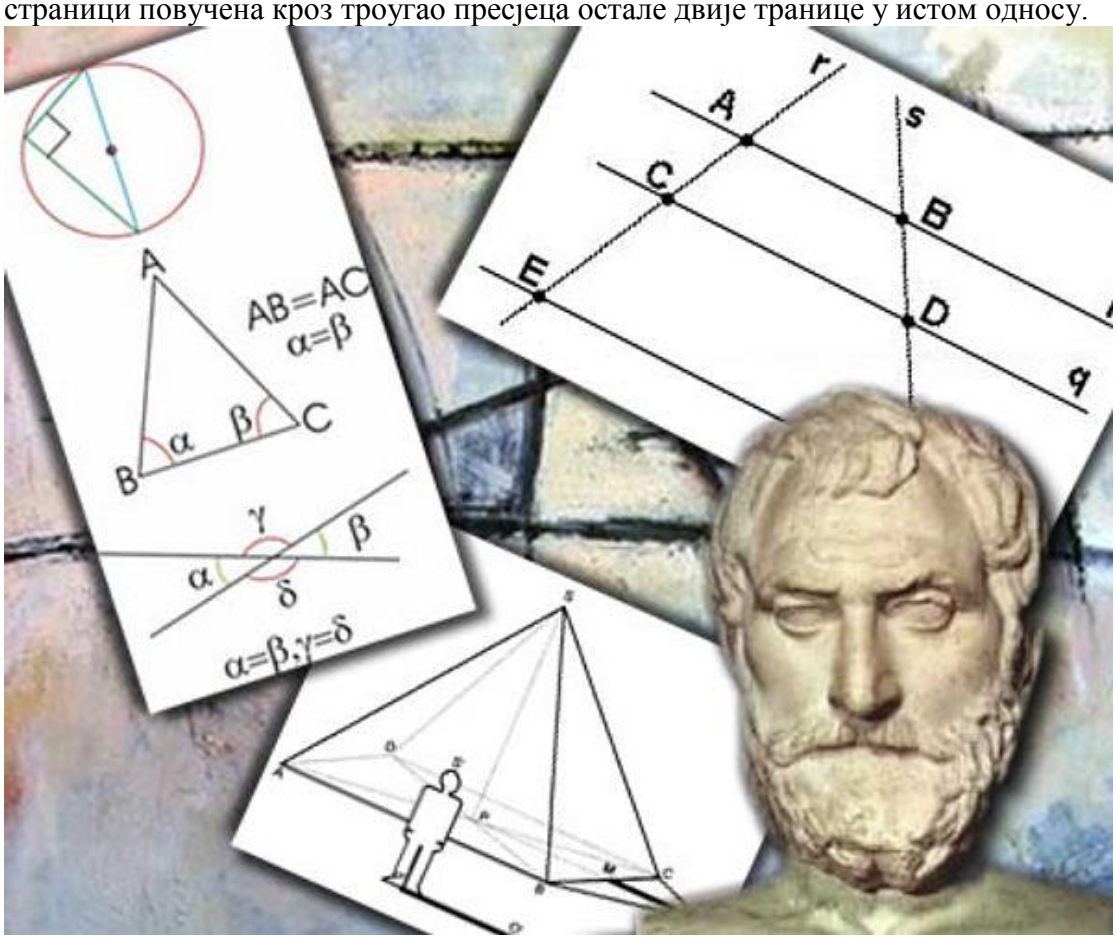
Пресликавање сличности не мјења облик фигуре већ само њену величину.

Сличне фигуре Φ и Φ' су оне за које постоји пресликавање сличности једне у другу. Када су фигуре Φ и Φ' сличне пишемо $\boldsymbol{\Phi \sim \Phi'}$.

За разлику од изометрија, пресликавање сличношћу није подударно пресликавање, односно оно нема својства кретања. Кореспондентне дужи сличних фигура у општем случају нису једнаке већ су пропорционалне.

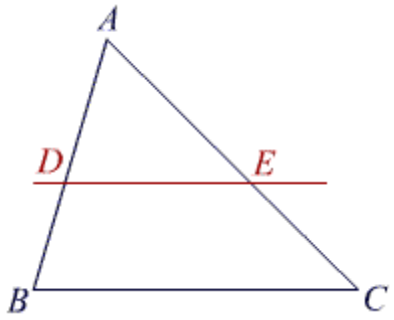
14.1. Талесова теорема

Основна теорема пропорционалности, тзв. Талесова теорема о сличним троугловима (такође енг. *Intercept theorem*), каже да линија паралелна једној страници повучена кроз троугао пресјеца остале двије странице у истом односу.



Талес из Милета (око 624. – 546. г.п.н.е.) био је грчки филозоф, математичар и државник. Убраја се у једног од седам мудраца. Талес је први покушао да објасни све природне феномене без позивања на митове и у томе је имао огроман каснији утицај, због чега је називан „отац науке“. Геометријски је израчунавао висине пирамида и удаљености бродова од обале. Сматра се да је први употребио доказ у математици, да би установио да је периферни угао над пречником прав. Рекао је: „Простор је највећа ствар, јер садржи све ствари“.

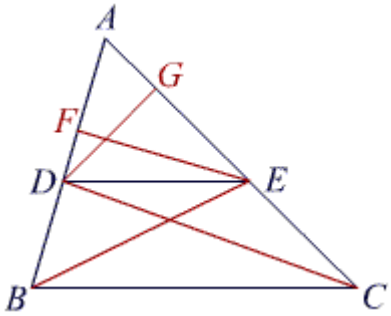
Теорема 14.1.1. Дати су троугао ABC и права DE ($D \in AB$, $E \in AC$). Из $DE \parallel BC$



и $AD / BD = k$, где је k константа, слиједи $AE / CE = k$.

Доказ: На слици лијево, дат је троугао ABC и права DE паралелна основици BC. Требамо доказати да је $AD / BD = AD / CE$.

Прво, из тачака E и D повуцимо нормале EF и DG на странице AB и AC датог троугла. Затим, спојимо дужи BE и CD. Добијамо сљедећу слику десно: $EF \perp AB \wedge DG \perp AC$, BE, CD. Отуда сљедеће површине троуглова.



$P(\Delta ADE) = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot EF$ и $P(\Delta BDE) = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot EF$,

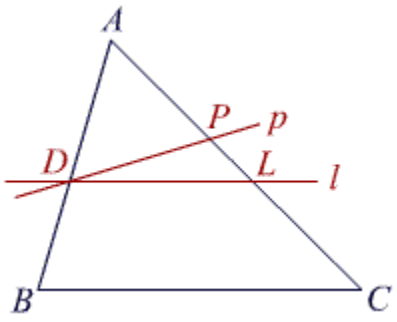
$P(\Delta ADE) = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot DG$ и $P(\Delta CED) = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot DG$.

Према томе имамо
$P(\Delta ADE) / P(\Delta BDE) = AD / BD$ и
$P(\Delta ADE) / P(\Delta CED) = AE / CE$. Такође је $P(\Delta BDE) = P(\Delta CED)$ јер ова два троугла имају заједничку основу DE која је паралелна са BC, тј. једнако је удаљена од тачака B и C. Из посљедње три једнакости слиједи $AD / BD = AE / CE$ што је и требало доказати. ♦

На основу претходне слике налазимо $\angle ADE = \angle ADC$ и $\angle AED = \angle ACB$. Друго, из $AD / BD = AE / CE$ слиједи $BD / AD = CE / AE$, затим $BD / AD + 1 = CE / AE + 1$, па $(BD + AD)/AD = (CE + AE)/AE$, тј. $AB / AD = AC / AE$, односно $AD / AB = AE / AC$.

Теорема 14.1.2. Ако линија дијели двије стране троугла у истом односу, онда линија мора бити паралелна трећој страни троугла.

Доказ: У троуглу ABC линија l пресјеца странице AB и AC у тачкама D и L тако да је $AD / DB = AL / LC$, као на слици лијево. Требамо доказати да је $DL \parallel BC$.



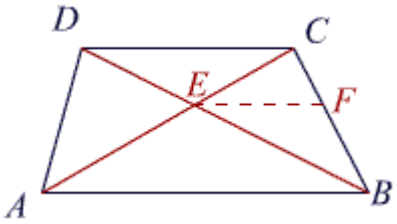
Претпоставимо да линија l није паралелна са BC већ да је то нека друга линија p, на истој слици DP.

Према претходном теорему (14.1.1.) биће $AD / DB = AP / PC$. Како је сада дато $AD / DB = AL / LC$ добијамо $AP / PC = AL / LC$. ♦

Трапез је четвороугао који има пар паралелних страна.

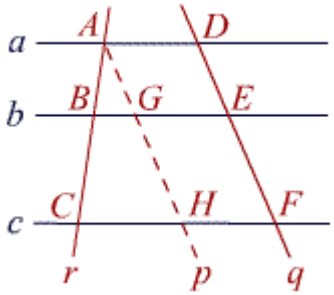
Примјер 14.1.3. Ако се дијагонале четвороугла сјеку пропорционално, доказати да је четвороугао трапез.

Рјешење: Дат је четвороугао $ABCD$ чије дијагонале се сјеку у тачки E при чему је $\frac{AE}{EC}=\frac{BE}{ED}$, као на слици десно. Треба доказати да је $ABCD$ трапез. Конструишимо EF ($F\in BC$) паралелно са AB. Из основне теореме (14.1.1.) имамо $\frac{CE}{EA}=\frac{CF}{FB}$, што са датом пропорцијом $\frac{CE}{EA}=\frac{DE}{EB}$ даје $\frac{DE}{EB}=\frac{CF}{FB}$, тј. EF је паралелно са CD. Према томе $AB \parallel DC$ односно четвороугао $ABCD$ је трапез.♦



Примјер 14.1.4. Ако три или више паралелних линија пресјечемо са двије трансферзале онда су одсјечци на трансферзалама пропорционални.

Рјешење: Дате су двије трансферзале p и q које сјеку три паралелне праве a, b и c у тачкама, редом A, B и C, односно D, E и F, као на слици лијево. Треба доказати $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.



Конструишимо праву $p \parallel q$ кроз тачку A. Пресјеци ове праве (p) са правама a, b и c су редом тачке A, G и H. Четвороугао $AGED$ је паралелограм, па је $AG = DE$. Такође, $GHFE$ је паралелограм, па је $GH = EF$. У троуглу ACH је $BG \parallel CH$, па је $\frac{AB}{BC}=\frac{AG}{GH}$, односно $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.♦

Задаци 14.1.5.

1. Ако су M, N и P средине страница AB, BC и CA троугла ABC, доказати једнакост површина троуглова:

а) $P(\Delta AMP) = P(\Delta BNM)$; **б)** $P(\Delta MNP) = \frac{1}{4}P(\Delta ABC)$.

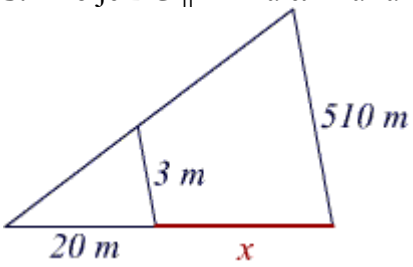
2. Доказати да линија повучена кроз средину једне странице троугла а паралелна другој мора проћи кроз средину треће странице.

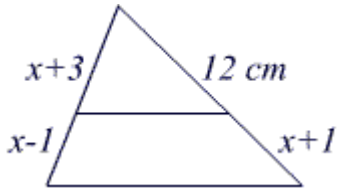
3. Дату дуж конструкцијом подјелити на
а) 5, **б)** 7 једнаких дјелова; **в)** подјелити је у датој размјери $a : b$.

4. Ако су дате дужи дужина a и b конструисати дуж дужине:

а) $a\cdot b$; **б)** $\frac{a}{b}$; **в)** $\frac{a}{a+b}$; **г)** $\frac{b}{a-b}$; **д)** $\frac{a+b}{a-b}$; **ђ)** $\frac{a^2-b^2}{ab}$.

5. Ако је $DC \parallel AB$ на сликама нађи непознате елементе:





6. Доказати да симетрала унутрашњег угла троугла ABC дијели наспрамну страницу на одсјечке пропорционалне осталим двјема страницама троугла.

14.2. Хомотетија

Хомотетија равни α је пресликавање $h : \alpha \to \alpha$ равни у саму себе тако да за одабрану тачку O и сваку тачку $A \in \alpha$ вриједи

$$\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA},\ k \in \mathrm{R}\backslash\{0\}.$$

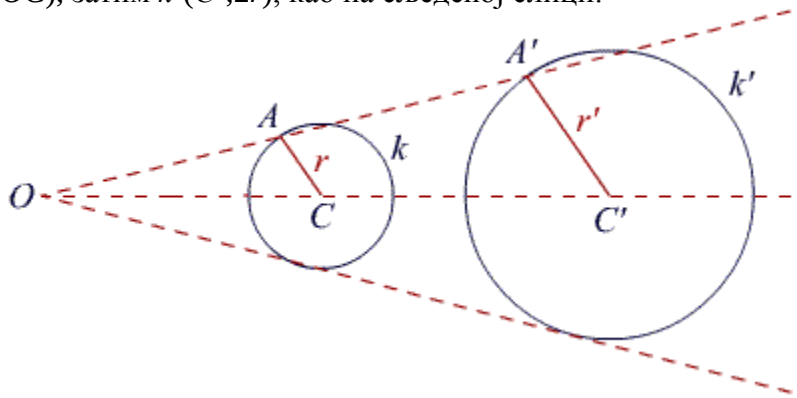
Пишемо и $A' = h(A)$. Одабрана тачка O назива се **центар хомотетије**, а реалан број k **центар хомотетије**. Ако је $k > 0$ хомотетија је **директна**, а ако је $k < 0$ хомотетија је **инверзна**.

Из Талесове теореме је лако доказати да је пресликавање h хомотетија ако и само ако вриједи једна од тврдњи:

1. права се пресликава у себи паралелну праву,
   дуж AB пресликава се у дуж AB' тако да је $AB = k \cdot AB'$;
2. угао се пресликава у једнак (подударан) угао.

Примјер 14.2.1. Нађи хомотетичну слику кружнице за $k = 2$.

Рјешење: Дати су тачка O и кружница $k(C,r)$. Конструишемо $OC' = 2 \cdot OC$ ($C' \in OC$), затим $k'(C',2r)$, као на сљедећој слици.

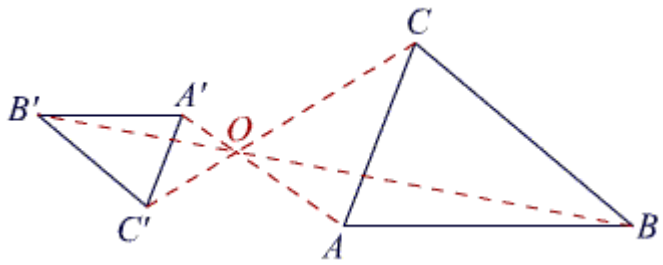


Доказ конструкције. Кружница k' је хомотетична слика k јер $\overrightarrow{OC'} = 2 \cdot \overrightarrow{OC}$ и $CA \parallel C'A'$. Отуда, по Талесовој теореми $OC : OC' = CA : C'T'$, што значи да је полупречник кружнице k' двоструко већи од полупречника кружнице k. ♦

Када је коефицијент хомотетије h позитиван ($k > 0$) лик и слика се налазе са исте стране центра хомотетије O, а ако је негативан ($k < 0$) налазе се са различитих страна.

Примјер 14.2.2. Хомотетијом са центром O и коефицијентом $k = -0{,}5$ пресликати дати троугао ABC у $\Delta A'B'C'$.

Рјешење: Дати су O, $k = -\frac{1}{2}$, ΔABC. Конструишемо тачке A', B' и C' тако да је



A'–O–A и $OA = 2 \cdot OA'$,
B'–O–B и $OB = 2 \cdot OB'$ и
C'–O–C и $OC = 2 \cdot OC'$.

$\Delta A'B'C'$ је хомотетична слика ΔABC у инверзној хомотетији, чији је коефицијент $k = -0{,}5$ јер је $\overrightarrow{OA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$. ♦

Задаци 14.2.3.

1. Конструиши хомотетичну кружницу (троугао) датој ако је коефицијент хомотетије: **а)** $k = \frac{3}{2}$; **б)** $k = -\frac{2}{3}$.

2. Нађи дужине страница хомотетичне слике троугла ABC страница дужина 15, 9 и 30 центиметара ако је: **а)** $k = -\frac{5}{3}$; **б)** $k = \frac{7}{3}$.

3. Конструисати једнакостранични троугао уписан у дати троугао чија једна страница са страницом датог троугла затвара угао 45°.

4. Конструисати троугао уписан у дати троугао тако да му странице буду окомите на странице датог троугла.

5. У дату полукружницу уписати квадрат чија два врха припадају пречнику, а остала два датој полукружници.

6. Конструисати кружницу која додирује краке датог угла и дату тачку унутар угла. Колико има рјешења?

14.3. Сличне фигуре

Дефиниција 14.3.1.

Пресликавање сличности равни α у саму себе $f : \alpha \to \alpha$ је такво за које вриједи $(\forall A, B \in \alpha)\ A'B' = k \cdot AB$, што пишемо $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $k > 0$.

Сличне фигуре ($\Phi \sim \Phi'$) називамо Φ и Φ' ако за сваке двије тачке $A, B \in \Phi$ вриједи:

$$\overline{f(A)f(B)} = k \cdot \overline{AB}.$$

Реалан позитиван број k називамо **коефицијент сличности**.

Из претходног је лако закључити да сличност пресликава праву у праву, а угао у једнак (подударан) угао.

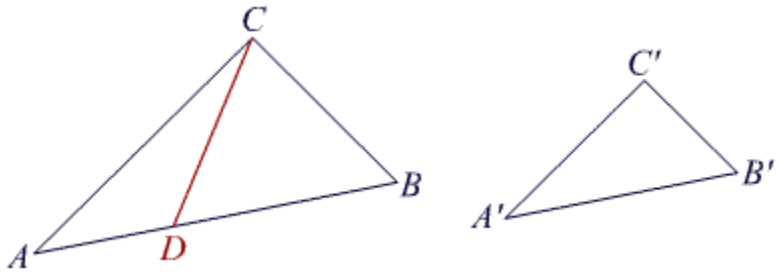
Дефиниција 14.3.2. Два троугла су слична ако је један од њих хомотетичан, а други подударан са неким трећим троуглом.

Према томе, лако је доказати сљедеће ставове.

Ставови сличности троуглова:

1. (сус) Два троугла су слична ако и само ако су им по двије одговарајуће странице пропорционалне и углови које те странице образују једнаки.
2. (уу) Два троугла су слична ако и само ако су им по два одговарајућа угла једнака.
3. (ссу) Два троугла су слична ако и само ако су им по двије одговарајуће станице пропорционалне и углови наспрам веће од њих једнаки.
4. (ссс) Два троугла су слична ако и само ако су им све одговарајуће странице пропорционалне.

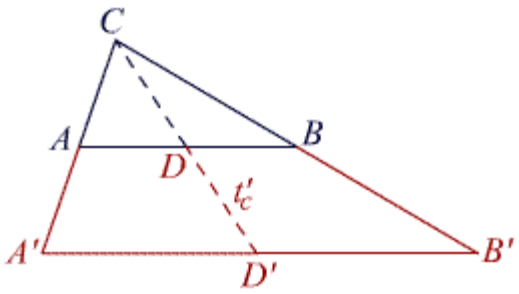
Примјетимо да је једино 3. став (ссу) услован, да једнаки углови морају бити наспрам веће стране. Наиме, ако су у два троугла по двије странице пропорционалне $BC : B'C' = AC : A'C'$ а једнаки углови $\angle A = \angle A'$ наспрам мање од њих $BC < AC$, тада ови троуглови ΔADC и $\Delta A'B'C'$ не морају бити слични, као што се види на слици горе лијево. Међутим, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ јер су им једнаки углови наспрам већих страна $\angle B = \angle B'$.



Примјер 14.3.3. Конструисати троугао сличан датом ако му је позната тежишна дуж.

Рјешење: Дат је троугао ΔABC и тежишница $t_c' = CD'$ а треба конструисати

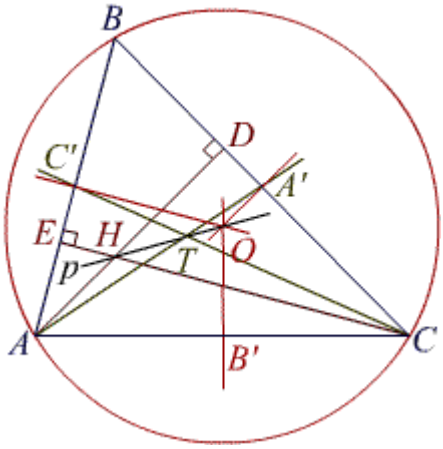
$\Delta A'B'C$ сличан датом али са тежишницом t_c', као на слици десно. Слични троуглови имају једнаке одговарајуће углове, па је поменута слика коректна. Према томе, они на датој слици имају и паралелне одговарајуће странице, нпр. $AB \parallel A'B'$.



Конструкција: Датом троуглу ABC конструишемо тежишницу AD (спојимо C са средином D странице AB), коју затим продужимо (скратимо) до дате дужине $t_c' = CD'$. Кроз тачку D' повучемо паралелу са AB до пресјека A' са правом AC и B' са правом BC. Тражени троугао је $A'B'C$. По ставу 2. (уу) је $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C$. Задатак има само једно рјешење. ♦

Примјер 14.3.4. Доказати да су центар описаног круга, тежиште и ортоцентар произвољног троугла колинеарне тачке.

Рјешење: На сљедећој слици, доле лијево дат је троугао ABC уписан у круг са центром O, са тежишницама AA' и CC' које се сјеку у тежишту T, и висинама AD и CE. Права p је одређена тачкама O и T.



Нека је пресјек праве p и висине AD тачка H. Из става 2.(уу) имамо сличност $\Delta A'OT \sim \Delta AHT$ а отуда $OT : TH = A'T : TA = 1 : 2$. Посљедња пропорција је особина тежишта, па добијамо $OT : TH = 1 : 2$.

Када би права p пресјецала висине AD и CE у двије различите тачке H и H' тада би такође важила и пропорција $OT : TH' = 1 : 2$, што са претходном даје $TH = TH'$, тј. да су H и H' једна иста тачка. Другим рјечима, ортоцентар троугла тачка H такође припада правој p је одређеној тачкама O и T. ♦

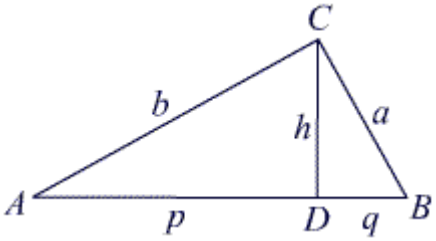
Ојлерова права троугла је права p на претходној слици која садржи центар описаног круга, тежиште и ортоцентар троугла.

Хипотенузина висина CD дјели правоугли троугао ABC на два правоугла троугла који су слични међусобно и слични са троуглом ABC. То слиједи непосредно из става 2. (уу).

Теорема 14.3.5. У сваком правоуглом троуглу важи:
1. Хипотенузина висина је геометријска средина одсјечака које сама одсјеца на хипотенузи.
2. (Еуклидов став) Катета је геометријска средина хипотенузе и ближег одсјечка хипотенузе.

3. Троугао је правоугли ако и само ако је збир квадрата двије његове странице једнак квадрату треће.

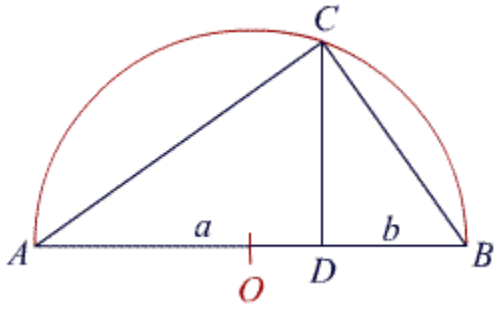
Доказ: На слици десно је правоугли троугао ABC са правим углом у тјемену C и са катетама a и b. Висина h је дуж CD која дијели хипотенузу на одсјечке $AD = p$ и $DB = q$ чији збир је дужина хипотенузе $AB = c$.



1) Из $\Delta ACD \cong \Delta CBD$ (став 2.уу) слиједи $p : h = h : q$ као што се и тврди. **2**) Из $\Delta CBD \sim \Delta ABC$ слиједи $a : q = c : a$, а из $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ слиједи $b : p = c : b$, као што је и требало доказати. **3**) Из претходног, важи $a^2 = cq$ и $b^2 = cp$ па је $a^2 + b^2 = cq + cp = c(q + p) = c^2$. Обратно, ако је $a^2 + b^2 = c^2$, доказаћемо да је ABC правоугли троугао у тјемену C. Конструишимо тачку B' такву да је $CB' = CB = a$ и $\angle ACB' = 90°$. Тада је $a^2 + b^2 = d^2$, гдје је $d = AB'$. Међутим, како је и $a^2 + b^2 = c^2$ то је $d = c$. Због тога (став ССС) подударни су троуглови ABC и $AB'C$, па је $\angle ACB = \angle ACB' = 90°$.♦

Примјер 14.3.6. Конструисати геометријску средину датих дужи a и b.

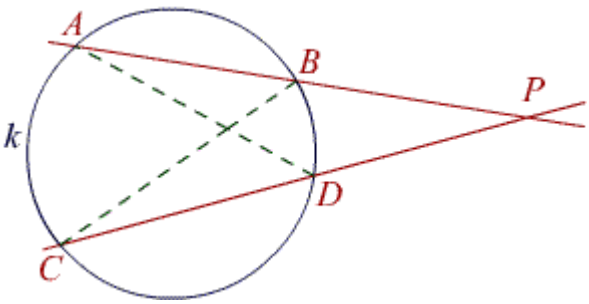
Рјешење: Периферни угао над пречником је прав (примјер 10.3.2.). Нека је $AD = a$, $DB = b$ и $A–D–B$ ($a + b = AB$) пречник полукруга на слици лијево.



Лако конструишемо круг са центром у O који има полупречник $OA = OB$. На кружници нађимо тачку C тако да је $CD \perp AB$. Висина CD троугла ABC је геометријска средина одсјечака a и b.♦

Теорема 14.3.7. Дат је круг k и тачка P у равни круга. Производ одсјечака које дати круг одређује на произвољној сјечици повученој кроз дату тачку је константан.

Доказ: На сљедећој слици, праве ABP и CDP сијеку дати круг k и садрже дату тачку P. Периферни углови из тачака A и C над истом тетивом BD су једнаки, па је $\Delta ADP \sim \Delta CBP$, што значи да је $AP : DP = CP : BP$. Отуда $AP \cdot BP = CP \cdot DP$ што је и требало доказати.♦



Дефиниција 14.3.8. Потенција тачке P у односу на круг k је константни производ $p^2 = PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Задаци 14.3.9.
1. Дати троугао има странице дужине 6, 7 и 9.
а) Колике су остале странице њему сличног троугла, ако је најмања дужине 13?
б) Колике су странице сличног троугла двоструке површине?

2. Доказати да су два троугла слична ако су све странице једног нормалне на одговарајуће странице другог.

3. Конструисати троугао ABC ако су му дати углови $\angle A$ и $\angle B$ и
а) тежишница из тјемена C; **б)** бисектриса (симетрала угла) $\angle C$.

4. У дати троугао ABC уписати квадрат тако да два његова тјемена припадају страници AB, а остала два другим двјема страницама троугла.

5. Доказати у произвољном троуглу да су било које двије висине обрнуто пропорционалне одговарајућим страницама.

6. Конструисати дуж чија дужина у односу на дату јединичну дужину износи:
а) $\sqrt{15}$; **б)** $\sqrt{10}$; **в)** $\sqrt{7}$; **г)** $\sqrt{5}$.

7. Дате су дужи a, b, c и d. Конструисати дужину:
а) $\sqrt{a^2+b^2}$; **б)** $a\sqrt{bc}$; **в)** $\sqrt{a^2-b^2}$; **г)** $ab+cd$.

8. Странице троугла су 13, 14 и 15. Наћи висине троугла.

9. Дат је круг k и тачка P унутар круга. Производ одсјечака које дати круг одређује на произвољној сјечици повученој кроз дату тачку је константан.

10. Ако је тачка P ван круга k, у истој равни круга, онда је потенција ове тачке у односу на дати круг једнака квадрату одговарајуће тангентне дужи.

15. Примјене симетрија

15.1. Примјери

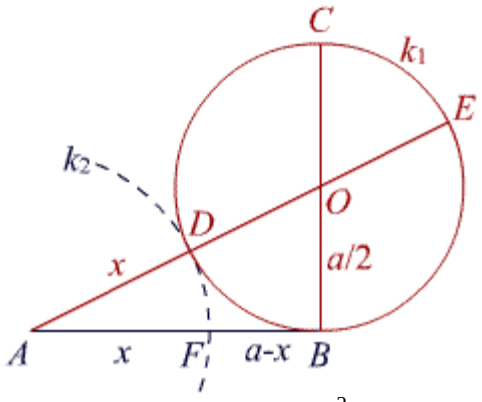
1. Конструисати златни пресјек дужи AB, тј. наћи тачку F на датој дужи такву да је $AB:AF = AF:FB$.

Анализа: На сљедећој слици десно, дата је дуж $AB = a$, на коју је додат је круг

$k_1(O, a/2)$ пречника $BC = a$, $BC \perp AB$, сјечица A-D-O-E, гдје $D, E \in k_1$, затим круг $k_2(A, AD)$, са $AD = x = AF$, и $F \in AB$. Тачка F дјели дату дуж AB у тзв. златном пресјеку.

Конструкција: ΔABO, гдје $\angle ABO = 90°$ и $\angle BAO = 30°$. Кружница $k_1(O, \frac{AB}{2})$.

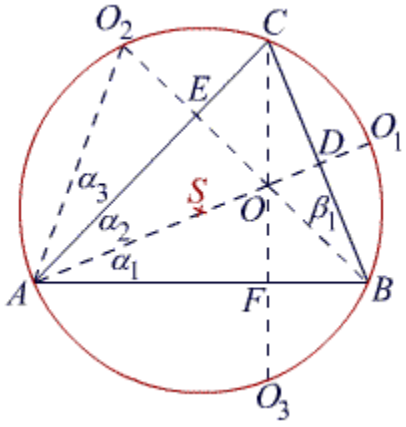
Сјечица A-D-O-E, гдје $D, E \in k_1$. Кружница $k_2(A, AD)$. $k_2 \cap AB = \{F\}$. Тачка F дјели дату дуж AB у златном пресјеку.



Доказ: Из потенције тачке A у односу на круг k_1 добијамо $AD \cdot AE = AB^2$. Отуда $x \cdot (x + a) = a^2$, односно $x^2 + ax = a^2$, те $x^2 = a^2 - ax$, тј. $x^2 = a(a - x)$, или $a : x = x : (a - x)$, што је дефиниција златног пресјека (такође, примјер 12.2.4.). ♦

2. Нека[6] је O ортоцентар троугла ABC. Доказати да тачке O_1, O_2, O_3 које су симетричне слике тачке O у односу на праве BC, CA, AB припадају описаној кружници тог троугла. Конструисати троугао када су дате тачке O_1, O_2, O_3.

Рјешење: Нека су D, E и F тачке у којима висине OO_1, OO_2 и OO_3 сјеку редом BC, AC и AB, као на слици лијево. Ту је $\angle O_2AC = \alpha_3$, $\angle CAO = \alpha_2$, $\angle OAB = \alpha_1$, $\angle OBC = \beta_1$.



$\Delta ADC \sim \Delta BEC$, јер су то два правоугла троугла са заједничким углом ACB. Тада је $\alpha_2 \cong \beta_1$, а отуда подударност лукова $O_1C \cong O_2C$, па је $\alpha_3 \cong \alpha_2$. Отуда и из $OO_2 \perp AC$ слиједи да је O_2 симетрична тачка тачке O у односу на AC. На исти начин, тачке O_1 и O_3 су симетричне тачки O у односу на BC и AB.

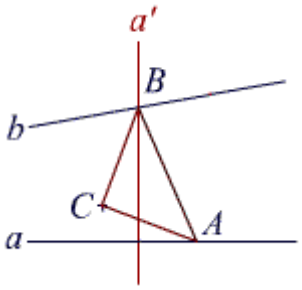
Када су дате тачке O_1, O_2, O_3, конструишемо кружницу која их садржи. Врхови A, B, C троугла биће средишта лукова O_2O_3, O_1O_3, O_1O_2. ♦

3. Дате су двије праве a и b и тачка C ван њих. Конструисати једнакокраки правоугли троугао коме врх правог угла лежи у датој тачки, а друга два врха на датим правама[7].

Рјешење: Права a' је добијена ротацијом праве a око тачке C за 90°. Пресјек

[6] Четрнаесто такмичење у математици БиХ, 1972.
[7] Тринаесто такмичење математичара БиХ, 1971.

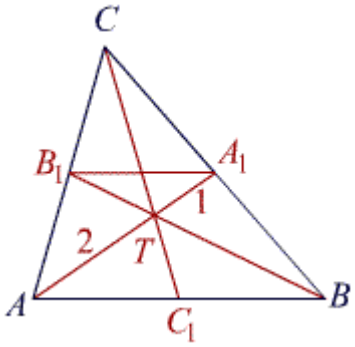
праве a' са правама a и b, ако постоји су тачке A и B, као на слици десно. Тачка $B = b \cap a'$ ротирана назад за 90° око тачке C је тачка $A \in a$. Троугао ABC је тражени.



Задатак има два рјешења ако се b и a' сјеку, ако није $b \perp a$ (прва ротација праве a око тачке C за ±90°). Задатак има једно рјешење ако је је $b \perp a$ и да C лежи на симетрали угла између правих b и a, када је $b \equiv a'$. Задатак нема рјешења ако је $b \parallel a'$, што значи да је $b \perp a$ и да C не лежи на симетрали угла између b и a.♦

4. Доказати да се тежишне дужи (тежишнице) троугла сјеку у једној тачки (тежишту) која их дјели у размјери 2 : 1 почев од тјемена..

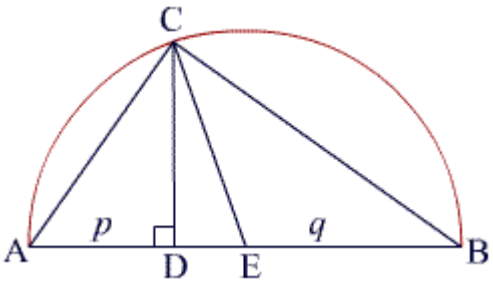
Рјешење: Подјелимо тежишницу AA_1 у односу 2 : 1 и тачку подјеле означимо са T, као на слици лијево. Затим, докажимо да тачка T припада и осталим двјема тежишницама BB_1 и CC_1 и да их такође дјели у истом односу.



Хомотетична слика тачке A у односу на центар T са коефицијентом –1/2 је A_1. Истом хомотетијом, дуж AB пресликава се у дуж A_1B_1 која је средња линија троугла. Зато $T \in BB_1$ и $BT : B_1T = 2 : 1$, односно $T \in CC_1$ и $CT : C_1T = 2 : 1$, што је и требало доказати.♦

5. Доказати да геометријска средина двије дужи није већа од њихове аритметичке средине.

Рјешење: Ако су p и q дате дужи, њихова геометријска средина је $\sqrt{pq}$, а аритметичка средина $\frac{p+q}{2}$. На слици десно, то су висина $CD = \sqrt{pq}$ и полупречник описане кружнице $AE = BE = CE = \frac{p+q}{2}$.



На поменутој слици десно, ABC је правоугли троугао висине CD која на хипотенузи AB одсјеца дате дужи $AD = p$ и $DB = q$, и тежишница AE која је и полупречник круга описаног око овог троугла. Из правоуглог троугла CDE налазимо $CD < CE$ тј. $\sqrt{pq} \le \frac{p+q}{2}$, гдје једнакост важи ако и само ако је $p = q$.♦

6. Нека су A, B и C три произвољне тачке дате кружнице. Доказати[8] да је удаљеност тачке C од сјечице AB геометријска средина одстојања тачака A и B од тангенте t у тачки C.

Рјешење: Нека је $\angle ACt = \beta'$, $\angle BCt' = \alpha'$, $\angle CBA = \beta$, $AC = x$, $BC = y$, као на сљедећој слици лијево. Подножја нормала спуштених из тачака A и B су P и Q. Тачка $D \in AB$ је подножје висине d троугла из тјемена C. Угао између тангенте и тетиве једнак је периферном углу над истом тетивом, односно

$\alpha = \alpha'$ и $\beta = \beta'$.

Отуда $\Delta ACD \sim \Delta CQB \Rightarrow$

$d : q = x : y$.

Аналогно, $\Delta BDC \sim \Delta CPA \Rightarrow$

$p : d = x : y$.

Из претходне двије пропорције

$d : q = p : d$, тј.

$d^2 = pq$, што је и требало доказати. ♦

15.2. Задаци

1. Конструисати троугао ако је дата једна страна и тежишница која одговара тој страни и ако је та тежишница нормална на другу једну тежишницу тог троугла. Под којим условима ће задатак имати рјешење? (Образложити и описати поступак и доказати тачност рјешења.)

[*Упутство*: Ако су дати c, t_c и $t_b \perp t_c$, повући кроз средиште дужи AC праву паралелну са t_c. Задатак има два симетрична рјешења ако је $\frac{c}{4} < t_c < \frac{5}{4}c$.]

2. На датој кружници констрисати тачку C тако да је размјера одстојања AC и BC тачке од двије дате тачке A и B кружнице једнака датој размјери $k = \frac{m}{n}$.

Конструкцију описати рјечима. Колико рјешења може да има задатак[9]?

[*Упутство*: Конструисати тачку D тако да је $AD : BD = m : n$. Како тачка D лежи између A и B задатак увијек има два рјешења, при чему за $m = n$ имамо подударне троуглове.]

[8] Дванаесто такмичење из математике у БиХ, 1970. године.
[9] Тринаесто такмичење у математици БиХ, 1971. године.

3. Доказати[10] да су тачке *M*, *N* и *P* у којима продужене висине троугла *ABC* сјеку описану кружницу тог троугла, симетричне ортоцентру тог троугла у односу на одговарајуће стране троугла. У дату кружницу уписати троугао ако су дате тачке *M*, *N* и *P*.

4. Троугао који чине подножја двију висина датог троугла *ABC* и трећи врх датог троугла сличан је троуглу *ABC* и кружница описана око тог троугла пролази кроз ортоцентар троугла *ABC*. Доказати[11].

5. За стране *a*, *b*, *c* правоуглог троугла увијек важи $a^2 + b^2 = c^2$, при чему су *a*, *b* катете а *c* хипотенуза. Међутим, доказати да је увијек $a + b \leq c\sqrt{2}$.

6. Симетрала једног угла троугла дјели наспрамну страну на два одсјечка. Доказати да је од та два одсјечка већи онај који је сусједан већој од друге двије стране троугла. За сваку тврдњу у доказвању треба навести теорему (правило) из које та тврдња слиједи[12].

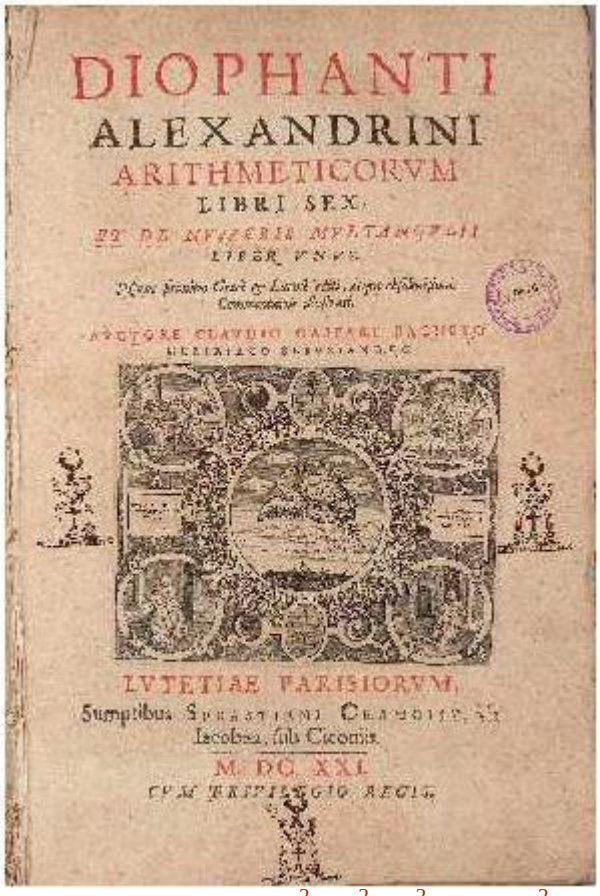
[Пресликати троугао симетрично према симетрали тог угла.]

[10] Једанаесто такмичење из математике БиХ, 1969. године.
[11] Тринаесто такмичење у математици БиХ, 1971. године.
[12] Петнаесто такмичење у математици БиХ, 1973.

V Алгебра

Алгебра у ужем смислу се бави рјешавањем једначина и неједначина. У ширем смислу, алгебра обухвата и оне области математике чија нас проблематика доводи до рјешавања једначина и неједначина. Примјери таквих су рачун са разломцима, растављање на факторе, проучавање и рад са посебним врстама функција, али и вектори, оператори или матрице. Са друге стране, ту је и тзв. апстрактна алгебра чије методе дјелом личе на рјешавање „обичних“ једначина.

Историја алгебре је почела у античком Египту и Вавилону, када су рјешаване



линеарне ($ax = b$), квадратне ($ax^2 + bx + c = 0$) и неодређене једначине ($x^2 + y^2 = z^2$).

Ту традицију су наставили Александријски математичари Херон (*Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρεύς*, око 10 – 70. г.) и Диофант (Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρεύς, око 210 – 290. г.) чија књига Аритметика је била на необично високом нивоу. Знања о рјешавањима једначина су се затим проширила на Арапски свијет под називом „наука о намјештању једнакости (арапски: ал-џабра)“ одакле савремени назив алгебре. Најпознатији арапски математичари из тог времена су Ал Хорезми (*al-Khwarizmi*, око 780 – 840. г.) и Омер Хајам (*Omar Khayyam*, 1048 – 1131.) из Перзије (Иран) и Египћанин Абу Камил (*Abū Kāmil*, око 850 – 930.). Они су успјевали рјешавати једначине попут $x + y + z = 10$, $x^2 + y^2 = z^2$ и $xz = y^2$.

Италијански математичар Фибоначи (*Leonardo Fibonacci*, 1170 – 1250.) је први приближно рјешио кубну једначину $x^3 + 2x^2 + cx = d$, чије опште рјешење су пронашли пар вијекова касније италијани Феро (*Scipione del Ferro*, 1465 – 1526.), Тартаља (*Niccolò Fontana Tartaglia*, 1500 – 1557.) и Кардано (*Gerolamo Cardano*, 1501 – 1576.). Ускоро је карданов ученик Ферари (*Lodovico Ferrari*, 1522 – 1565.) нашао опште рјешење једначине четвртог степена, да би тек почетком 19. вијека млади норвешки математичар Абел (*Niels Henrik Abel*, 1802 – 1829.) и француски математичар Галоа (*Evariste Galois*, 1811 – 1832.) доказали да формула за опште рјешење алгебарске једначине петог и већег степена не постоји.

Упоредо, од 16. вијека је настајала модерна алгебра. Француски филозоф и математичар Декарт (*René Descartes*, 1596 – 1650.) је пронашао аналитичку геометрију, која своди рјешења геометријских проблема на рјешења алгебарских. Њемачки математичар Гаус (*Carl Friedrich Gauss*, 1777 – 1855.), на слици лијево, је доказао да свака полиномска једначина има бар једно рјешење у комплексној равни. Важне доприносе модерној алгебри дали су и француз Коши (*Augustin Cauchy*, 1789 – 1857.), британац Кејлеј (*Arthur Cayley*, 1821 – 1895.) и норвежанин Ли (*Sophus Lie*, 1842 – 1899.).

Британски математичар и астроном Хамилтон (*William Rowan Hamilton*, 1805 – 1865.) је пронашао кватернионе, општи облик комплексних бројева. Кватернионе је затим проучавао њемац Грасман (*Hermann Grassmann*, 1809 – 1877.) открившви векторе. Амерички физичар Гибс (*Josiah Willard Gibbs*, 1839 – 1903.) је брзо препознао векторску алгебру као моћно средство рада у физици. Са друге стране, истраживање логичког мишљења методама модерне алгебре установио је енглез Бул (*George Boole*, 1815 – 1864.) послије чега савремену алгебру називамо и апстрактна алгебра.

16. Једнакости

Једнакост је исказ да су два математичка израза једнаки.

Условна једнакост, или **једначина** је једнакост која је тачна само за извјесне вриједности промјењљивих, као на примјер једнакост

$$5x + 7 = 22,$$

која је тачна једино ако промјењљива x има вриједност 3. Условне једнакости називамо једначинама. Вриједност промјењљиве x за коју је условна једначина тачна (овдје $x = 3$) називамо **рјешење** једначине. За једначину која има рјешење кажемо и да има **сагласност.**

Неодређена једначина (такође сагласност) је једначина која има много, или бесконачно много рјешења. Рецимо, једначину

$$|x + 2| + |x – 3| = 5 \text{ рјешава свако } x \in [-2, 3],$$

док било који број изван овог интервала није рјешење те једначине.

Немогућа једначина (противрјечност, контрадикција) је једнакост која није тачна нити за једну вриједност промјењљивих, нпр. $x + 1 = x + 2$.

Идентитет је једнакост која је ријетко нетачна, као на примјер

$$\frac{2x-6}{x-3} = 2,$$

која је тачна када год промјењљива x нема вриједност 3. Понекад умјесто „=“за идентитет користимо симбол „≡“ ради разликовања од условне једнакости.

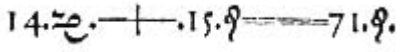
Рјешити једнакост значи наћи све вриједности промјењљивих за које је исказ једнакости тачан. Уобичајено је рећи да једначине рјешавамо, а да идентитете провјеравамо, или доказујемо.

Еквивалентне једнакости су оне које имају једнаке скупове рјешења. На примјер $x - 1 = 0$ и $x^2 - 1 = 0$ нису еквивалентне једнакости јер је скуп рјешења прве једночлан {1}, а друге двочлан {1, -1}.

Еквивалентне трансформације једнакости су оне које једнакост преводе у еквивалентну. То су додавање (одузимање) истог израза на обе стране једнакости, или множење (дјељење) истом вриједношћу осим нулом обе стране једнакости. На примјер, све сљедеће једнакости су еквивалентне:

$$5x + 7 = 22, \ / -7$$
$$5x + 7 - 7 = 22 - 7,$$
$$5x = 15, \ /:5$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{15}{5},$$
$$x = 3.$$

Посљедња наведена, најједноставнија у низу еквивалентних једнакости је рјешење почетне једначине.

Прву једнакост модерном симболиком написао је 1557. велшки љекар и математичар Роберт Рекорде (*Robert Recorde,*  око 1510. – 1558.). Била је то $14x + 15 = 71$, на претходној слици.

16.1. Линеарне једначине

Примјер 16.1.1. Рјешити линеарну једначину $8x - 5 = 2x + 7$ и провјерити рјешење.

Рјешење: Лијево су еквивалентне једнакости и рјешење, а десно је провјера.

$$8x - 5 = 2x + 7 \ , /+5$$
$$8x = 2x + 12 \ , /-2x$$
$$6x = 12 \ , /:6$$
$$x = 2.$$

$$8 \cdot 2 - 5 = 2 \cdot 2 + 7 \ ?$$
$$16 - 5 = 4 + 7$$
$$11 = 11$$
$$\text{T} \ \blacklozenge$$

Примјер 16.1.2. Једнакост која повезује температурну скалу у степенима Фаренхајта (°*F*) и Целзијуса (°*C*) је линеарна $F = 1{,}8 \cdot C + 32$. Колика је температура у Целзијусима ако је она 212°*F*.

Рјешење: $212 = 1{,}8 \cdot C + 32 \Leftrightarrow 212 - 32 = 18 \cdot C \Leftrightarrow 18 \cdot C = 180 \Leftrightarrow C = 100°$. ♦

Примјер 16.1.3. Када се Ана родила, њена мама је имала 21 годину. Сада Ана има 30% година своје маме. Колико је Ани година?

Рјешење: Сада Ана има x година, а њена мама $x + 21$. То значи да је $x = 30\%(x + 21)$. Другим рјечима $x = \frac{30}{100}(x + 21)$, тј. $10x = 3x + 63$, односно $x = 9$. Ана сада има 9 година. ♦

Задатак 16.1.4. Поновите параграфе &6.2. (Пропорције) и &6.3. (Примјене пропорција).

Примјер 16.1.5. Методом супституције рјешити систем линеарних једначина:

$$2x + 5y = 11,$$
$$y = 3x + 2.$$

Рјешење: Уметнемо (супституишемо) вриједност y из друге (доње) једначине у прву. Добијамо 2x + 5(3x + 2) = 11, па након еквивалентних трансформација $x = \frac{1}{17}$. Затим, $y = 3 \cdot \frac{1}{17} + 2$, тј. $y = \frac{37}{17}$. Провјера рјешења је $2 \cdot \frac{1}{17} + 5 \cdot \frac{37}{17} = 11$, што је тачно.♦

Примјер 16.1.6. Методом једнаких коефицијената (Гаусова метода елиминације) рјешити систем линеарних једначина:

$$5x + 3y = 4,$$
$$7x - 2y = 3.$$

Рјешење: Помножимо прву (горњу) једначину са 2, а другу са 3. Добијамо

$$10x + 6y = 8,$$
$$21x - 6y = 9.$$

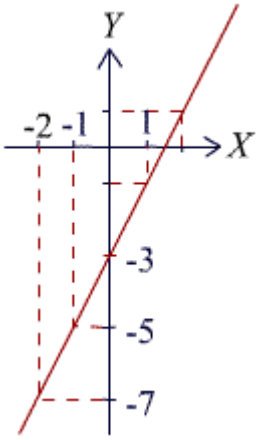
Сабирањем слиједи једначина $31x = 17$, те $x = \frac{17}{31}$. Замјеном (увртањем) ове вриједности у било коју од датих једначина и рјешавањем по промјењивој y налазимо $y = \frac{13}{31}$. Провјера рјешења даје $5 \cdot \frac{17}{31} + 3 \cdot \frac{13}{31} = 4$ и $7 \cdot \frac{17}{31} - 2 \cdot \frac{13}{31} = 3$, што је тачно.♦

Примјер 16.1.7. Рјешити и дискутовати систем линеарних једначина:

$$a(x + y) + b(x - y) = a,$$
$$a(x - y) - b(x + y) = b.$$

Рјешење: Једначине се лако своде на еквивалентне: $(a + b)x + (a - b)y = a$ и $(a + b)x - (a - b)y = b$. Сабирањем, односно одузимањем једначина добијамо $(a+b)x = \frac{a+b}{2}$ и $(a-b)y = \frac{a-b}{2}$. Ако је $a = b = 0$ имамо еквивалентан систем $0 \cdot x = 0$, $0 \cdot y = 0$, тј. сагласност (бесконачно рјешења). Ако је $a = b \neq 0$, биће $x = \frac{1}{2}$ и произвољно $y \in \mathbf{R}$. Ако је $a = -b \neq 0$, биће произвољно $x \in \mathbf{R}$ и $y = \frac{1}{2}$. У свим осталим случајевима ($a \neq \pm b$) имамо јединствено рјешење $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.♦

Експлицитни облик линеарне једначине са двије промјењиве x, y је $y = kx + n$, гдје су k, n константе, коефицијенти.



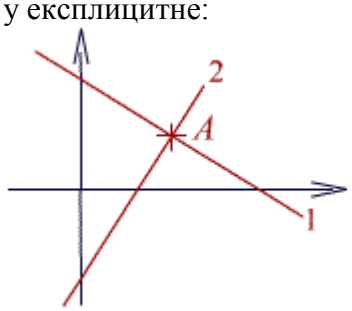
На примјер, једначина $y = 2x - 3$ за вриједности промјењиве x редом -2, -1, 0, 1, 2, ... даје y = -7, -5, -3, -1, +1, ... У уређеним паровима бројева (x, y) то су (-2, -7), (-1, -5), (0, -3), (1, -1), (2, 1), ..., које можемо представити Декартовим системом координата као колинеарне тачке које садржи граф ове једначине. Према томе, линеарна једначина представљена овим графом је права, као на слици лијево. Отуда и назив линеарна.

Уопште, коефицијент k представља „брзину“ раста праве. У случају $k > 0$, као на датој слици, граф је растућа права. Када је $k = 0$ права је паралелна X оси. Када је $k < 0$ тада права опада. Коефицијент n је мјесто гдје права пресјеца Y осу.

Примјер 16.1.8. Графички рјешимо систем линеарних једначина:

$$5x + 3y = 4,$$
$$7x - 2y = 3.$$

Рјешење: Дате једначине из општег облика преведимо у експлицитне: $y = -\frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$, $y = \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}$. Графови прве и друге једначине скицирани су на слици десно, гдје је $A(17/31, 13/31)$ њихова тачка пресјека. То је тачка која припада сваком од графова (1) и (2) те је рјешење припадног система. ♦



Питање: које су вриједности координата тачака пресјека правих и координатних оса на претходној слици?

Задаци 16.1.9.

1. Рјешити једначине по x и провјерити рјешења:

а) $3 - 2(4 - 3(5 - 4(6 - x))) = 20x + 127$;

б) $x - 5(x - 4(x - 3(2x - 1))) = 4x - 140$;

в) $3\left(\frac{5x}{2} - \frac{2x}{5}\right) - 5\left(\frac{2x}{3} - \frac{3x}{4}\right) = 6x - 43$;

г) $5\left(\frac{4x}{3} - \frac{3x}{4}\right) - 3\left(\frac{5x}{2} - \frac{2x}{5}\right) = -4x + 37$;

д) $x - \frac{1}{2}\left(x - \frac{2}{3}\left(x - \frac{3}{4}\left(x - \frac{4}{5}\right)\right)\right) = \frac{7}{12}x + \frac{1}{5}$;

ђ) $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6}(1 - x)\right)\right) = \frac{5}{16}x - \frac{3}{7}$.

2. Рјешити по x, или y и дискутовати по параметрима a, b, p, или q једначине:

а) $a(ax + 1) = 2(2x - 1)$;

б) $b^2 y + 4 = b(y + 4)$;

в) $\frac{a-y}{b-a}-\frac{a+y}{a+b}=\frac{2ay}{a^2-b^2}$; **г)** $\frac{2x+p}{q}-\frac{x-q}{p}=\frac{3px+(p-q)^2}{pq}$.

3. Наћи сва рјешења једначина са апсолутним вриједностима:
а) $|2x-1|+|x+2|=-3x-1$; **б)** $|3x+2|-|2x-1|=5x+1$;
в) $|x+1|+|x|+|x-1|=x+1$; **г)** $|x-2|-|x|+|x+2|=x+4$.

4. Двоцифрен број је за три мањи од четвороструког збира и од десетоструке разлике својих цифара. Који је то број?

5. Предузимач је запослио 5 одраслих и 3 тинејџера за једнодневни посао и платио им укупно 199 КМ. Сљедећи дан је запослио 3 одрасла и 5 тинејџера и платио их 145 КМ. Колике су дневнице за одрасле и за тинејџере?

6. Два човјека удаљена 7 километара крену у сусрет један другом равномјерним ходом и сретну се за 35 минута. Да су они кренули у истом правцу, бржи би сустигао споријег за 3 часа и 30 минута. Којим брзинама се они крећу?

7. Рјешити систем линеаних једначина и провјерити рјешења:
а)
$$y=\frac{2}{3}(3x-2y)+\frac{1}{2}(2x-3y),$$
$$9x+23y=621;$$
б)
$$x=\frac{3}{5}(5x-3y)-\frac{1}{3}(3x-5y),$$
$$15x+11y=195;$$
в)
$$\frac{5x-3y+3}{6}-\frac{4x-7y+1}{9}=4,$$
$$\frac{7x+3y-5}{12}-\frac{5x-2y+1}{14}=3;$$
г)
$$\frac{3x-2y+2}{10}-\frac{5x-6y-2}{12}=2;$$
$$\frac{6x+2y+2}{15}-\frac{4x-3y-2}{21}=3;$$
д)
$$5x+3y=1,$$
$$2y+5z=14,$$
$$3z+2x=16;$$
ђ)
$$7x+4y=27,$$
$$6y+7z=9,$$
$$4z+6x=42.$$

8. Наћи сва рјешења система једначина:
а)
$$\frac{\frac{5x-3y+1}{2}-2x+7y-3}{3}=-1,$$
$$x+5y+1=-6y;$$
б)
$$\frac{\frac{4x+2y-1}{3}+5x-3y+1}{7}=1,$$
$$10x-7y+2=21-9x;$$

9. Графички рјешити систем линеарних једначина:
а) $y=2x-3 \wedge y=-x+3$; **б)** $y=0{,}5x-1 \wedge y=-1{,}5x+3$;
в) $3x-5y=-1 \wedge 2x+3y=12$; **г)** $5x+2y=3 \wedge -7x+3y=19$.

10. За које вриједности параметра m систем

а)

$$-3x + (m+1)y = 3,$$
$$(m+1)x - 3y = 3;$$

б)

$$-2x + (m-1)y = 5,$$
$$(m+1)x - 4y = 5;$$

а) има бесконачно рјешења?
б) нема рјешења?

11. Рјешити систем једначина са апсолутним вриједностима:

а)

$$|x + 1| + |y - 2| = 3,$$
$$2|x + 1| = 3y - 1;$$

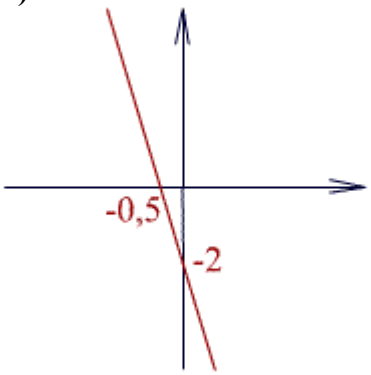
б)

$$|x + y| + |x - y| = 5,$$
$$3|x - y| = 2x + 1.$$

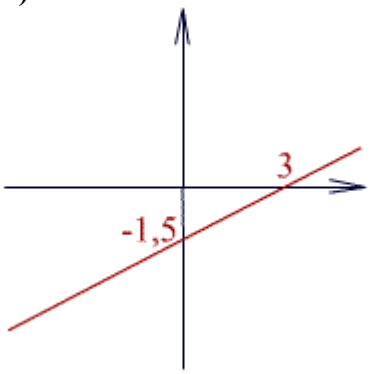
12. Конструисати графове функција:
а) y = |2x – 1| + 3;
б) y = |2x + 1| – 3;
в) $y = |3x - 1| + 2x - 5$;
г) $y = -0{,}5|x + 2| + 1{,}5(x - 1)$.

13. Формирати линеарну функцију на основу графа:

а)



б)



16.2. Детерминанте

Систем линеарних једначина се може рјешавати и помоћу детерминанти. На примјер, дат је линеарни систем двије једначине:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2,$$

чије су непознате x_1 и x_2 док су остали бројеви су константе. Овај систем је (углавном) еквивалентан Крамеровом систему једначина $\Delta \cdot x_1 = \Delta_1$, $\Delta \cdot x_2 = \Delta_2$, гдје су бројеви Δ , Δ_1 и Δ_2 тзв. детерминанте другог реда, дефинисане једнакостима

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

Прва детерминанта Δ назива се **детерминанта система**. Формира се простим узимањем коефицијената једначина. Сљедећа је Δ_1 детерминанта прве варијабле коју добијамо из детерминанте система замјеном прве колоне коефицијентима прве непознате x_1. Детерминанта Δ_2 друге промјењљиве добијена је опет из детерминанте система замјеном друге колоне коефицијентима друге промјењљиве x_2.

Детерминанту **другог реда рјешавамо** тако што од производа елемената на главној дијагонали (с лијева у десно и доле) одузмемо производ елемената на споредној дијагонали (с десна у лијево и доле).

Примјер 16.2.1. Дати систем једначина у општем облику

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2,$$

рјешимо методом супротних коефицијената.

Рјешење: Прву једначину помножимо са a_{22} а другу са a_{12} па их одузмимо. Поништава се варијабла x_2 и добијамо $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$, тј. $\Delta \cdot x_1 = \Delta_1$ према претходно дефинисаним ознакама. Затим, прву једначину помножимо a_{21} а другу са a_{11} па их одузмимо. Поништава се варијабла x_1 и добијамо $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = b_1a_{21} - b_2a_{11}$, тј. $\Delta \cdot x_2 = \Delta_2$. Дакле, добили смо поменути Крамеров систем једначина. ♦

Линеарни систем једначина рјешавамо детерминантама када је он сведен на основни облик, када даља рачунања желимо аутоматизовати, и посебно ако систем садржи параметре па је потребна дискусија рјешења.

Примјер 16.2.2. Рјешити и дискутовати систем једначина:

$$x - my = m,$$
$$x + ny = n.$$

Рјешење: Детерминанта система је $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -m \\ 1 & n \end{vmatrix} = n + m$, а детерминанте непознатих су $\Delta_x = \begin{vmatrix} m & -m \\ n & n \end{vmatrix} = mn - (-mn) = 2mn$ и $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & n \end{vmatrix} = n - m$. Према томе, Крамеров систем је $\Delta \cdot x = \Delta_x$, $\Delta \cdot y = \Delta_y$, односно:

$$(n + m)x = 2mn,$$
$$(n + m)y = n - m.$$

Ако је детерминанта система нула ($n + m = 0$), а бар једна вриједност на десној страни једнакости није нула, тј. ако је $n = -m \neq 0$, тада је Крамеров систем у контрадикцији и дати систем једначина нема рјешење. Ако све три детерминанте имају вриједност нула, тј. ако је $n = m = 0$, тада имамо сагласност, бесконачно је много рјешења облика $x = 0$, y – произвољно. Коначно, ако детерминанта система

није нула ($n + m \neq 0$) имамо јединствено рјешење система $x = \frac{2mn}{n+m}$, $y = \frac{n-m}{n+m}$ за сваки дати пар бројева m и n.♦

Систем три линеарне једначине рјешавамо аналогно помоћу четири детерминанте трећег реда. На примјер, линеарни систем три једначине:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3,$$

чије су непознате x_1 , x_2 и x_3 , еквивалентан (са рјетким изузецима) је Крамеровом систему једначина $\Delta \cdot x_1 = \Delta_1$, $\Delta \cdot x_2 = \Delta_2$, $\Delta \cdot x_3 = \Delta_3$, гдје су бројеви Δ , Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 тзв. детерминанте трећег реда. Прву, детерминанту система формирамо непосредно помоћу коефицијената система:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

а затим из ње замјеном прве, друге, треће колоне слободним коефицијентима са десне стране једнакости, добијамо редом детерминанте прве, друге, треће варијабле, тј.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Детерминанту трећег реда можемо рјешавати на сљедећа два начина.

Сарусово правило је поступак да од производа по три елемента на три главне дијагонале одузмемо производе по три елемента на три споредне дијагонале исте детерминанте. На примјер,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}).$$

Примјер 16.2.3. Рјешити систем једначина

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -9 \\ 5x + y - 2z = 12 \\ x - 2y - 3z = 1. \end{cases}$$

Рјешење: Детерминанта система је, Сарусовим правилом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix} = -6 + 6 - 10 - (1 + 8 + 45) = -64.$$

Затим налазимо детерминанте варијабли:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -9 & -3 & 1 \\ 12 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -9 & -3 \\ 12 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix} = 27 + 6 - 24 - (1 - 36 + 108) = -64,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -9 & 1 \\ 5 & 12 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -9 \\ 5 & 12 \\ 1 & 1 \end{matrix} = -72 + 18 + 5 - (12 - 4 + 135) = -192,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -9 \\ 5 & 1 & 12 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix} = 2 - 36 + 90 - (-9 - 48 - 15) = 128.$$

Крамеров систем једначина $\Delta \cdot x = \Delta_x$, $\Delta \cdot y = \Delta_y$, $\Delta \cdot z = \Delta_z$, постаје

$$-64x = -64,\ -64y = -192,\ -64z = 128, \text{ тј.}$$
$$x = 1,\ y = 3,\ z = -2.$$

Провјера рјешења, увртавањем добијених резултата у полазни систем једначина налазимо: $2\cdot 1 - 3\cdot 3 + 1\cdot(-2) = -9$ (тачно је), $5\cdot 1 + 1\cdot 3 - 2\cdot(-2) = 12$ (тачно је), $1 - 6 + 6 = 1$ (тачно је!). ♦

Опште правило је поступак развијања детерминанте дуж (произвољне) врсте (или колоне), сабирањем производа тих елемената и њихових кофактора.

Кофактор елемента детерминанте је број једнак производу детерминанте добијене уклањањем врсте и колоне датог елемента, са предзнаком датог елемента. Предзнаци елемената су распоређени као црно-бијела поља на шаховској табли, при чему је горе лијево плус.

Вриједност детерминанте је збир производа елемената једне произвољне врсте (или произвољне колоне) са одговарајућим кофакторима. На примјер, наведену детерминанту система развијамо по првој врсти:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}),$$

што ће након сређивања дати исто рјешење као претходно, помоћу Сарусовог правила.

Примјер 16.2.4. Рјешити систем једначина:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}=8 \\ \frac{4}{x}-\frac{3}{y}+\frac{5}{z}=13 \\ \frac{7}{y}+\frac{4}{z}-\frac{5}{x}=21. \end{cases}$$

Рјешење: Уводимо смјену $\frac{1}{x}=u$, $\frac{1}{y}=v$, $\frac{1}{z}=w$, па добијамо систем линеарних једначина $u + 2v + w = 8 \wedge 4u - 3v + 5w = 13 \wedge -5u + 7v + 4w = 21$. Детерминанта овог система (развијена по првом ретку) је:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \\ -5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = -116.$$

Детерминанте (нових) варијабли u, v и w су редом:

$$\Delta_u=\begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 13 & -3 & 5 \\ 21 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \text{трећа колона} = 1\cdot\begin{vmatrix} 13 & -3 \\ 21 & 7 \end{vmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 21 & 7 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 13 & -3 \end{vmatrix} = -116,$$

$$\Delta_v=\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 4 & 13 & 5 \\ -5 & 21 & 4 \end{vmatrix} = \text{прва колона} = 1\cdot\begin{vmatrix} 13 & 5 \\ 21 & 4 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 21 & 4 \end{vmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} = -232,$$

$$\Delta_w=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 4 & -3 & 13 \\ -5 & 7 & 21 \end{vmatrix} = \text{друга врста} = -4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 7 & 21 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -5 & 21 \end{vmatrix} - 13\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = -348.$$

Крамеров систем једначина даје $-116\cdot u = -116$, $-116\cdot v = -232$, $-116\cdot w = -348$, односно $u = 1$, $v = 2$, $w = 3$. Враћањем смјене добијамо x = 1, $y=\frac{1}{2}$, $z=\frac{1}{3}$. Провјера: $\frac{1}{1}+\frac{2}{1/2}+\frac{1}{1/3}=8$ (тачно је), $\frac{4}{1}-\frac{3}{1/2}+\frac{5}{1/3}=13$ (тачно је), $\frac{7}{1/2}+\frac{4}{1/3}-\frac{5}{1}=21$ (тачно је!). ♦

Задаци 16.2.5. Користите детерминанте гдје је то могуће.

1. Рјешити систем линеарних једначина:

а)

$$\begin{cases} -2x+3y=12 \\ 3x+5y=1; \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} 2x-3y=-17 \\ -5x+y=10. \end{cases}$$

2. Утврдити да ли је сљедећи систем сагласан, неодређен или противрјечан:

а) **б)**

$$\begin{cases} 3x-7y=-11 \\ -9x+21y=22; \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x+6y=8 \\ 6x+9y=12. \end{cases}$$

3. Рјешити и дискутовати рјешења система:

а)

$$\begin{cases} x+ay=5 \\ 3x+ay=6; \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+a^2y=a. \end{cases}$$

4. Рјешити линеарни систем једначина:

а)

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=3 \\ x-y+z=4 \\ 3x-2y-z=6; \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x-2y+z=9 \\ 2x-y-z=6. \end{cases}$$

5. Показати да су све детерминанте датог система нула, а да систем нема нити једно рјешење:

$$\begin{cases} 4x+8y+4z=-2 \\ 3x+6y+3z=1 \\ x+2y+z=-1. \end{cases}$$

16.3. Рационалне једначине

Аналогно бројевима, рационалним алгебарским изразима називамо разломке чији бројник и називник су полиноми, односно цијели алгебарски изрази.

Задатак 16.3.1. Поновити параграф 7.2. (Растављање на факторе).

Задатак 16.3.2. Поновити параграф 7.3. (Поједностављивање).

Примјер 16.3.3. Рјешити и дискутовати систем једначина:

$$\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}=a,$$
$$\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=b.$$

Рјешење: Уводимо смјену $u=\frac{1}{x-y}$, $v=\frac{1}{x+y}$ и добијамо систем линеарних једначина: $u+v=a \wedge u-v=b$. Сабирањем, односно одузимањем ових слиједи $u=\frac{a+b}{2} \wedge v=\frac{a-b}{2}$, па враћањем смјене добијамо $x-y=\frac{2}{a+b} \wedge x+y=\frac{2}{a-b}$.

Поново, сабирањем па одузимањем и сређивањем добијамо $x=\frac{2a}{a^2-b^2} \wedge$

$y = \dfrac{2b}{a^2 - b^2}$. Изрази немају смисла, и према томе систем нема рјешења ако је било који од назива нула, тј. ако је $a = \pm b$. ♦

Задаци 16.3.4.

1. Раставити на факторе:

а) $\dfrac{9}{4} - \left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2$;

б) $\dfrac{4}{9} - \left(b - \dfrac{1}{3}\right)^2$;

в) $x^2 + 4x - 60$;

г) $y^2 - 28y + 180$;

д) $2u^2 - 31u + 42$;

ђ) $3v^2 + 43v - 30$.

2. Поједноставити изразе:

а) $\dfrac{y^4 + y^2 + 1}{y^4 + 3y^2 + 1 - 2y^3 - 2y}$;

б) $\dfrac{x^4 + 2x^2 + 9}{x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9}$;

в) $\dfrac{1 - \dfrac{4}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{6}{x^2}} : \dfrac{x-2}{x-3}$;

г) $\dfrac{1 - \dfrac{9}{a^2}}{1 - \dfrac{8}{a} + \dfrac{15}{a^2}} : \dfrac{a+3}{a-5}$;

д) $\left[\dfrac{z^4 - z^2 + 2z - 1}{\left(z^2+1\right)^2 - z^2} - \dfrac{\left(z^2-1\right)^2 - z^2}{z^4 + 2z^3 + z^2 - 1}\right] : \dfrac{z^2 - 2z}{z^3 - 1}$;

ђ) $\dfrac{3abc}{bc + ac + ab} - \dfrac{\dfrac{a-1}{a} + \dfrac{b-1}{b} + \dfrac{c-1}{c}}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}}$.

3. Доказати:

а) $a + \dfrac{1}{a} = 1 \Rightarrow a^5 + \dfrac{1}{a^5} = 1$;

б) $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} \wedge a + b + c = 1 \wedge a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow xy + xz + yz = 0$;

[**а**. Смјена $1/a = b$, па је $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = -1$ и $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = -2$, те $a^5 + b^5 = (a^2 + b^2)(a^3 + b^3) - a^2b^2(a + b) = 1$. **б**. Из $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$, и из $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{k} \Rightarrow a = kx,\ b = ky,\ c = kz$.]

4. Дјечак има 35 маркица. Неке вриједе 2 цента, друге 5 цента, а остале су по 10 цента. Он има три пута више маркица од 5 цента него од 2 цента, а укупна вриједност његових маркица је 1,89 еура. Колико појединих маркица има дјечак?

5. Карте за утакмицу коштају 6, 10, или 15 еура свака. Укупно је продато три пута више карата од 10 еура него оних од 6 и 500 мање од броја карата од 15 еура. Ако је

укупни приход од продаје карата 84450 еура, колико од поједине врсте карата је продато?

6. Рјешити једначине и провјерити рјешења:

а) $\frac{3}{14+2x}+\frac{21}{49-x^2}=\frac{4}{14-2x}$;

б) $\frac{7}{3x-9}-\frac{7}{3x+9}=\frac{2}{x^2-6x+9}$;

в) $2-\frac{x}{1+\frac{x}{1-x}}=x^2$;

г) $\frac{\frac{3}{x-3}+\frac{5}{x+3}}{\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x+3}}=\frac{5}{14}$;

д) $\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{x^2-2x+1}$;

ђ) $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+1+2x}=\sqrt{4+4x+x^2}$.

7. Рјешити и дискутовати једначине:

а) $\frac{ax}{a+x}+\frac{bx}{x-b}=a+b$;

б) $\frac{x+2}{x^2-3x}+\frac{x+a}{x^2+3x}=\frac{2x+b}{x^2-9}$;

в) $\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-ac}{a+c}+\frac{x-bc}{b+c}=a+b+c$;

г) $\frac{x-a}{bc}+\frac{x-b}{ac}+\frac{x-c}{ab}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

8. За $x\neq 0$ и $x\neq \pm m$, показати да је рјешење једначине

$$\frac{mx+n}{x^2-mx}+\frac{mx-n}{x^2+mx}=\frac{2mx+4}{x^2-m^2}$$

позитивно ако су параметри m и n истог знака.

9. Показати да је рјешење једначине

$$\frac{m^2-x^2}{mx}+\frac{x-2}{x}=1\frac{1}{2}-\frac{x+1}{m}$$

паран број за свако $m\in\mathbf{Z}$, $m\neq 0$.

10. Рјешити систем једначина:

а) $\frac{5}{x+2y}+\frac{4}{2x+y}=2$,

$\frac{4}{x+2y}+\frac{5}{2x+y}=\frac{41}{20}$;

б) $\frac{4}{x+y-1}+\frac{1}{x-y+1}=1$,

$\frac{18}{x+y-1}-\frac{2{,}5}{x-y+1}=1$;

в) $\frac{3}{x^2+y^2}+\frac{2}{x^2-y^2}=-\frac{11}{65}$,

$\frac{2}{x^2+y^2}-\frac{3}{x^2-y^2}=\frac{49}{65}$;

г)

$\frac{x^2+15}{y^2+4}=\frac{4y^2+5}{3x^2-20}=3$.

11. Рјешити и дискутовати систем једначина:

а) $\frac{a}{x+y}+\frac{b}{x-y}=1,$ $\frac{a^2}{x+y}-\frac{b^2}{x-y}=\frac{a-b}{2};$

б) $\frac{x+y}{x-y}=\frac{a}{b-c},$ $\frac{x+c}{y+b}=\frac{a+b}{a+c};$

12. Показати да ће за свако $m \in \mathbf{Z}$ рјешење система

$$\frac{2m}{x+my}-\frac{1}{x-my}=1,$$
$$\frac{10m}{x+my}+\frac{3}{x-my}=1,$$

бити x непаран и y рационалан број.

17. Неједнакости

17.1 Неједначине

Линеарне неједначине, или неједначине првог степена са једним аргументом, непознатом x су облика $a_1x + b_1 > a_2x + b_2$, или $a_1x + b_1 < a_2x + b_2$, односно $a_1x + b_1 \geq a_2x + b_2$, или $a_1x + b_1 \leq a_2x + b_2$, гдје су a_1, b_1, a_2 и b_2 реални бројеви, константе, параметри.

Двије или више неједнакости овог облика образују систем неједначина првог степена са једном непознатом.

Рјешење неједначине је скуп вриједности аргумента која задовољавају неједначину, односно систем неједначина.

Еквивалентне неједначине су оне које имају једнаке скупове рјешења.

Примјер 17.1.1. Рјешити неједначину $\frac{2x-1}{3}-\frac{3x+1}{2}\leq 1-\frac{x-1}{6}$.

Рјешење: Множимо лијеву и десну страну неједнакости истим бројем 6 (позитивним, па неједнакост остаје истог смјера) и добијамо

$$2(2x - 1) - 3(3x + 1) \leq 6 - (x - 1), \text{ те}$$
$$-5x - 5 \leq 7 - x.$$

Додајемо $5 + x$ на обе стране неједнакости, добијамо

$$-4x \leq 12,$$

и дјелимо обе стране са -4 (негативним бројем, па неједнакост мјења смјер):

$$x \geq -3.$$

Рјешења су реални бројеви $x \in [-3, +\infty)$.♦

Примјетите да је $-x < 3$ еквивалентно са $x > -3$, и аналогно за сваку од релација неједнакости из скупа $\{<, >, \leq, \geq\}$. Рјешавање линеарне неједначине је веома

слично рјешавању линеарне једначине осим једне „ситнице“. Смјер неједнакости се мјења сваки пут када множимо, или дјелимо неједначину негативним бројем.

Примјер 17.1.2. Рјешити и дискутовати mx > 3m.

Рјешење: Имамо три случаја:
(*i*) Ако је $m > 0$ тада дјелимо неједнакост са m и добијамо рјешење $x > 3$;
(*ii*) Ако је $m = 0$ тада увршатавањем, $0 \cdot x > 3 \cdot 0$ закључујемо да нема рјешења;
(*iii*) Ако је $m < 0$ дјелимо и добијамо рјешења $x < 3$.♦

Производ два реална броја је позитиван ако су оба броја истог знака, ако су оба броја позитивна, или су оба негативна. Са друге стране, производ два броја је негативан ако су бројеви различитог знака.

Примјер 17.1.3. Рјешити неједначину $x^2 + x - 2 \geq 4$.

Рјешење: Пребацујемо све сабирке на лијеву страну и растављамо на факторе:

$$x^2 + x - 6 \geq 0,$$
$$(x + 3)(x - 2) \geq 0.$$

Отуда, могућа су два рјешења: прво, $x + 3 \geq 0 \wedge x - 2 \geq 0$, односно $x \geq -3 \wedge x \geq 2$, тј. $x \in [2, +\infty)$; и друго $x + 3 \leq 0 \wedge x - 2 \leq 0$, односно $x \leq -3 \wedge x \leq 2$, тј. $x \in (-\infty, -3]$. Коначно, рјешење датог система је $x \in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$.♦

Примјер 17.1.4. Наћи сва рјешења неједначине: $\dfrac{3-4x}{x-2} > x$.

Рјешење: Пребацујемо све на лијеву страну неједнакости (не множимо неједнакости непознатим) и сређујемо:

$$\frac{3-4x}{x-2} - x > 0,$$
$$\frac{-x^2-2x+3}{x-2} > 0, \text{ или}$$
$$\frac{x^2+2x-3}{x-2} < 0, \text{ тј.}$$
$$\frac{(x-1)(x+3)}{x-2} < 0, \text{ односно}$$
$$(x+3)(x-1)(x-2) < 0.$$

Све четири наведене неједнакости су међусобно еквивалентне! Функција $f(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 2)$ је непрекидна. Она у својим нулама, за $x \in \{-3, 1, 2\}$ мјења знак, при чему за $x = -10$ је $f(-10) = (-7)(-11)(-12) < 0$. Отуда разумјемо да је $f(x) < 0$ за свако $x < -3$, да је $f(x) > 0$ за свако $-3 < x < 1$, да је $f(x) < 0$ за свако $1 < x < 2$, те да је $f(x) > 0$ за свако $2 < x < +\infty$. Дакле, рјешење дате неједначине је скуп бројева $(-\infty, -3) \cup (1, 2)$. Исто понекад представљамо табелом.♦

Задаци 17.1.5.

1. Рјешити неједначине:

i. $2x + 5 \le -3$; **ii.** $3 - \frac{1}{2}x \ge 5$; **iii.** $\frac{2x-3}{4} < 3x+1$.

2. Рјешити и дискутовати неједначину:

i. $3x - m \ge -mx + 3$; **ii.** $5x - a > -ax + 5$; **iii.** $kx + 1 < x + k^2$.

3. Рјешити неједначине:

i. $|2x - 5| < 7$; **ii.** $|3x - 1| > 2$; **iii.** $|x - 1| + |x + 1| \le 2$.

4. Рјешити систем линеарних неједначина:

i.
$$\begin{cases} 3x - 5 \le 0 \\ 2x - 3 \le 0; \end{cases}$$

ii.
$$\begin{cases} 2x - 5 \ge 0 \\ 3x - 13 < 0; \end{cases}$$

iii.
$$\begin{cases} -x + 7 < 0 \\ 5x + 15 \ge 0. \end{cases}$$

5. Наћи сва рјешења неједначина:

i. $\frac{2x+3}{x-5} < 1$; **ii.** $\frac{3-2x}{3x-2} > 1$; **iii.** $\frac{x^2-3x}{x+2} \le 0$.

iv. $x^3 + x^2 - 2x \ge 0$; **v.** $x^3 + 2x^2 - x \le 2$; **vi.** $x^3 + 3x^2 - 4x > 12$.

6. За које вриједности параметра систем једначина

i.
$$\begin{cases} mx - y = 3 \\ x - my = 5; \end{cases}$$

ii.
$$\begin{cases} kx - y = 1 \\ x - ky = k; \end{cases}$$

iii.
$$\begin{cases} px - y = p \\ x - py = 1. \end{cases}$$

има рјешење (x, y) такво да је $x + y > 1$?

17.2. Важније неједнакости

Прије свега, то су чињеница да за све (реалне) бројеве a, b, c, d важи:

- из $a < b$ слиједи $b > a$;
- из $a < b$ слиједи $a + c < b + c$, а из $a > b$ слиједи $a + c > b + c$;
- из $a < b$ и $c < d$ слиједи $a + c < b + d$;
- из $a < b$ и $m > 0$ слиједи $am < bm$;
- из $a < b$ и $m < 0$ слиједи $am > bm$.

То су главне особине неједнакости, које су нам већ познате. Сљедећа је такође очигледна, али мање позната тзв. неједнакост троугла, и мање очигледна тзв. инверзна неједнакост троугла.

Став 17.2.1. За све реалне бројеве a, b важи $|a + b| \le |a| + |b|$.

Наиме, ако су бројеви *a* и *b* позитивни онда можемо брисати апсолутне заграде и важи једнакост. Ако су бројеви *a* и *b* оба негативни онда им мјењамо предзнак да би брисали апсолутне заграде и случај се своди на претходни. Ако су бројеви *a* и *b* различитог знака онда је збир у заградама лијево мањи.

Став 17.2.2. За све реалне бројеве *a* и *b* важи $|a - b| \geq ||a| - |b||$.

Доказ: из неједнакости троугла $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$ слиједи $|a - b| \geq |a| - |b|$, и симетрично из $|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|$ слиједи $|b - a| \geq |b| - |a|$. Али $|a - b| = |b - a|$, па је $|a - b|$ веће или једнако од оба $|a| - |b|$ и $|b| - |a|$. ♦

Многе остале важније елементарне неједнакости добијамо из чињенице да квадрат реалног броја не може бити негативан број. Другим рјечима,

Став 17.2.3. $(\forall x \in \mathbf{R})\ x^2 \geq 0$.

Отуда слиједи да је квадрат сваког реалног израза ненегативан, из чега изводимо многе друге неједнакости.

Примјер 17.2.4. За све позитивне бројеве *x, y, z* су тачне неједнакости:
i. $x^2 - x + 1 > 0$;
ii. $x^2 - xy + y^2 \geq 0$;
iii. $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0$.

Доказ: **(i)** како је $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, а збир два позитивна броја је позитиван;

(ii) из $x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$; **(iii)** из $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx =$

$\frac{1}{2}\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right] \geq 0$. ♦

Став 17.2.5. Геометријска средина два ненегативна броја није већа од њихове аритметичке средине, тј. за свако $a, b \geq 0$ биће $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. Ова релација је једнакост ако и само ако су бројеви међусобно једнаки.

Доказ: Из $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ слиједи $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$, па $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, односно $2\sqrt{ab} \leq a + b$, из чега дјељењем са 2 слиједи тврђење теорема. ♦

Посљедице 17.2.6.

i. Кошијева неједнакост $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$, која важи за све реалне бројеве *a* и *b*.

ii. Неједнакост $a+\frac{1}{a}\geq 2$, која важи за позитивне бројеве a.

Доказ: (**i**) Претходни став за бројеве a^2 и b^2, иначе позитивне; (**ii**) Претходни став за позитивне бројеве a и $1/a$.♦

Став 17.2.7. Геометријска средина три ненегативна броја није већа од њихове аритметичке средине, тј. за свако $a, b, c \geq 0$ биће $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$. При томе важи једнакост ако и само ако су бројеви међусобно једнаки.

Доказ: Пођимо од неједнакости 17.2.4.iii. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geq 0$.
Помножимо је ненегативним бројем $a + b + c$ да добијемо $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$, тј. $abc \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$, па уведимо смјену $x = a^3$, $y = b^3$, $z = c^3$. Замјеном $a=\sqrt[3]{x}$, $b=\sqrt[3]{y}$, $c=\sqrt[3]{z}$ из добијене неједнакости слиједи тврђење.♦

Задаци 17.2.8.
1. Доказати да за произвољне бројеве x, y и z важи неједнакост:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\geq x+y+z\,.$$

[Пођи од збирова $(w-1)^2$.]

2. Ако је $x + y > 0$, доказати да важи неједнакост:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^3 \leq \frac{x^3+y^3}{2}\,.$$

[Свести на еквивалентну $0 \leq (x+y)(x-y)^2$.]

3. Ако су a, b и c произвољни природни бројеви, доказати да је:

$$ab + bc + ca \leq 3abc.$$

[За природне бројеве је $ab \leq abc$ и даље редом, па саберемо.]

4. За све позитивне бројеве a, b и c важи неједнакост:

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq a+b+c\,.$$

[Примјенити став 17.2.5. за $\frac{ab}{c}$ и $\frac{bc}{a}$, и даље редом, па сабрати.]

5. Доказати да за $a, b, c \geq 0$ важи:

$$(a+b+c)(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\geq 9abc\,.$$

[Примјенити став 17.2.7. на a, b, c, и опет на такође ненегативне корјене истих, па помножити релације.]

6. Хармонијска средина бројева *a, b* је $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. Доказати да је хармонијска средина два позитивна броја мања или једнака од њихове геометријске средине.

7. Квадратна средина бројева *a, b* је $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Доказати да је квадратна средина два позитивна броја већа или једнака њиховој аритметичкој средини.

8. Аритметичка средина 23, 40 и x мора бити већа од 31. Колико може бити x ако је $x < 40$?

[$30 < x < 40$]

9. Јана и њен брат Марко воле да се међусобно такмиче. Једног дана, Марко је изазвао сестру на трканје бициклом, који је кренуо да вози константном брзином 15 km/h. Након 20 минута, Јана га је почела стизати. Која је најмања просјечна брзина којом би Јана за 30 минута могла стићи Марка?

[25 km/h]

17.3. Линеарно програмирање

Математичко програмирање (линеарно, нелинеарно, динамичко), или Линеарно програмирање је математичка дисциплина која се појавила од 1935. до 1955. године, из планских разматрања привредних, производних и проблема транспорта.

Прве идеје о линеарном програмирању дали су Нојман (*John von Neumann*, 1903 – 1957.) у вези са моделима економије (1936.) и Канторовић (*Леони́д Вита́льевич Канторо́вич*, 1912 – 1986.) у вези са планираном производњом и превозом (1939.). Данциг (*George Bernard Dantzig*, 1914 – 2005.) је 1947. формулисао први општи проблем линеарног програмирања и развио тзв. симплексну методу за рјешавање тога проблема. У САД-у је током Другог свјетског рата Купманс (*Tjalling Charles Koopmans*, 1910 – 1985.) радио на линеарном програмирању првенствено за потребе војне логистике и транспорта, да би са Канторовичем 1975. подјелио нобелову за економију за пионирски рад у линеарном програмирању.

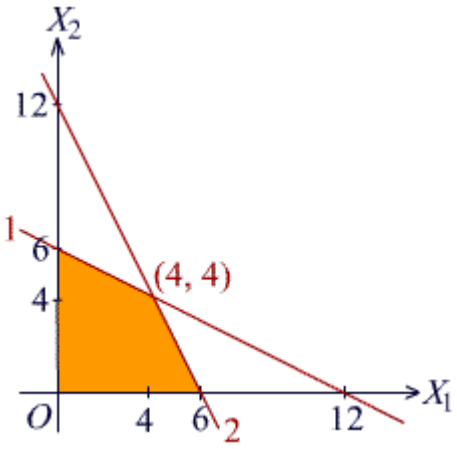
Примјер 17.3.1. Фабрика производи два модела M_1 и M_2 неке робе и то помоћу стројева C_1 и C_2. За модел M_1 стројеви раде редом 2 часа и 4 часа. За модел M_2 раде 4 часа и 2 часа. Ако је зарада 300 динара по моделу M_1, а 500 динара по моделу M_2, треба одредити како треба организовати рад стројевима па да зарада буде што већа.

Рјешење: Нека је x_1 је број израђених јединица модела M_1 на дан.
Нека је x_2 је број израђених јединица модела M_2 на дан.

То значи да је зарада $F(x_1,x_2) = 300 \cdot x_1 + 500 \cdot x_2$.

При томе треба да буде $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 24, \end{cases}$ и $\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

Рјешење сваке од четири неједначине је затворена полураван, као на сљедећој слици, десно.



(1) Прва једначина, линија која иде кроз тачке (0,6) и (12,0) је граница прве полуравни. Како је тачка (0,0) рјешење ове неједначине, то је тражена полураван она која садржи исходиште координатног система.
(2) Друга, пролази кроз (0,12) и (6,0), је граница полуравни која такође садржи (0,0).

Ове линије се сјеку у тачки (4,4).

У самим врховима, (0,0), (6,0), (4,4), (0,6), функција зараде $F(x_1,x_2)$ има вриједности редом: 0, 1800, 3200, 3000. Дакле, највећа зарада је постигнута у тачки (4,4).

То значи да ће зарада бити максимална када се на строју C_1 дневно произведе 4 примјерка робе M_1, а на строју C_2 такође 4 примјерка робе M_2. Зарада је дневно 3200 динара. ♦

Уопште, **проблем линеарног програмирања** је налажење максимума или минимума вриједности линеарног израза (функција објекта):

$$F = ax + by + cz + \dots ,$$

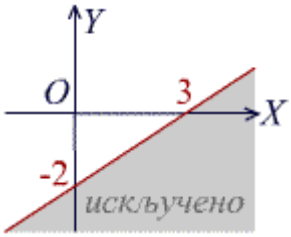
са линеарним (субјективним) ограничењима облика:

$$Ax + By + Cz + \dots \le N, \text{ или } Ax + By + Cz + \dots \ge N.$$

Највећа, или најмања вриједност функције F зове се оптимална вриједност, а скуп вриједности $x, y, z, \dots$ које дају оптималну вриједност зове се оптимално рјешење. Те варијабле се зову варијабле одлуке.

Примјер 17.3.2. Скицирати линеарну неједнакост $2x - 3y \le 6$.

Рјешење: Дата неједнакост има бесконачно много рјешења, тачака (x, y) које све



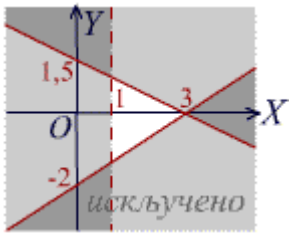
леже у непрекидној области. Та област је полураван горе и лијево, чија је граница права $2x - 3y = 6$, као на слици лијево.

Наиме, координатни почетак (0, 0) је рјешење дате неједначине (јер је $2\cdot 0 - 3\cdot 0 \le 6$), па и сва околина те тачке, до границе.♦

Примјер 17.3.3. Наћи област ограничену линеарним неједнакостима:

$$\begin{cases} 2x - 3y \le 6, \\ x + 2y \le 3, \\ x \ge 1. \end{cases}$$

Рјешење: Праве $2x - 3y = 6$, $x + 2y = 3$ и $x = 1$ су границе полуравни које су Рјешења дате три неједначине. Прве двије полуравни садрже O, а трећа не, што је лако утврдити увртавањем координата исходишта.

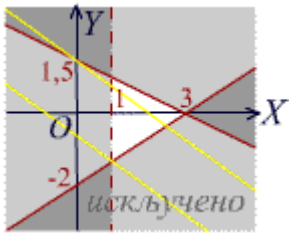


Према томе систем неједначина има коњукцију рјешења која је приказана пресјеком одговарајућих полуравни, на слици десно. Рјешење система неједначина је троугао (заједно са унутрашњошћу) чија тјемена су (1, -4/3), (3, 0), (1, 1).♦

Примјер 17.3.4. Наћи најмању вриједност функције $F = 3x + 4y$, уз ограничења:

$$\begin{cases} 2x - 3y \le 6, \\ x + 2y \le 3, \\ x \ge 1. \end{cases}$$

Рјешење: На истом цртежу из претходног примјера имамо двије паралелне



праве, горња $3x + 4y = 6$ која пролази кроз наведени троугао и тачкама (0; 1,5) и (2, 0), и доња $3x + 4y = -7/3$ која пролази кроз доње тјеме тог троугла, као на слици лијево.

Бројеви 6 и -7/3 су вриједности броја F дате функције објекта. Уопште, за различите вриједности броја F дата функција представља паралелне праве, тако да је права на графу ниже када је број F мањи. Према томе најмању вриједност функције F имамо када та права додирује најнижу тачку ограничења, овдје тачку (1, -4/3).

Према томе, најмања вриједност функције уз дата ограничења, оптимална вриједност је $F = -7/3$.♦

Задаци 17.3.5.

1. Произвођач производи двије врсте бетона. Свака врећа висококвалитетног бетона садржи 10 килограма шљунка и 5 килограма цемента, док свака врећа нискоквалитетног бетона садржи 12 кг шљунка и 3 кг цемента. У складишту има 1920 кг шљунка и 780 кг цемента. Произвођач зарађује \$1,20 по врећи висококвалитетног и \$1,00 по врећи нискоквалитетног бетона, и жели одредити колико врећа треба произвести једнога и другога из доступних сировина за највећу зараду.

[упутство:

	Висококвалитетан / кг	Нискоквалитетан / кг	Расположиво
Шљунак	10	12	1920
Цемент	5	3	789
Зарада / вр.	1,20	1,00	

Тражи се минимум функције $F = 1{,}2\cdot x + 1{,}0\cdot y$ са ограничењима: $10x + 12y \le 1920$ (шљунак) и $5x + 3y \le 780$ (цемент), уз додатак да негативне вриједности x (висококвалитетни бетон) и y (нискоквалитетни) немају физикални смисао.]

2. Нацртајте рјешења неједначина:

а) $x < 3$; **б)** $3x - y \ge 2$; **в)** $2x + y \le 5$.

3. Одредите подручје рјешења система неједначина:

а) $\begin{cases} 3x - y \ge 2 \\ 2x + y \le 5; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x + 3y < 5 \\ 3x - 2y < 1; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x - 2y > 3 \\ 4x + 3y > 2. \end{cases}$

4. а) Минимизирати. **б)** Максимизирати линеарну форму $F = 2x + y$ на скупу ненегативних рјешења система ограничења:

$$\begin{cases} x + 2y \le 5 \\ x - y \ge 1 \\ x + y \le 4. \end{cases}$$

5. а) Минимизирати. **б)** Максимизирати линеарну форму $F = 100 - 2x - y$ на систему ограничења:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 4 \\ x + y \le 6 \\ x + 4y \ge 8. \end{cases}$$

VI Вектори

У неком ширем смислу, линеарна алгебра обухвата и оне области математике чија нас проблематика води до рјешавања линеарних једначина или неједначина. Примјери таквих су вектори, детерминанте и матрице, које су овдје тема.

Прве идеје о векторима спознали су на свој начин и антички грчки филозофи, Аристотел (384 – 322. г.п.н.е.) у правилу сабирања вектора помоћу паралелограма, и Херон из Александрије (1. вијек) у својој Механици. О векторима говори и Први королар Њутнових (*Isaac Newton*, 1643 – 1727.) Принципа математике (1687. године).

Међутим, сматрамо да је теорија вектора настајала првих деценија 19. вијека са геометријском репрезентацијом комплексних бројева. Весел (*Caspar Wessel*, 1745 – 1818), Арган (*Jean Robert Argand*, 1768 – 1822), Гаус (*Carl Friedrich Gauss*, 1777 – 1855) и још пар других математичара открили су комплексне бројеве као тачке у равни, које је затим од 1837. до 1843. поопштио Хамилтон (*William Rowan Hamilton*, 1805 – 1865). Већ 1850-их Хамилтонову теорију је примјењивао његов ученик Таит (*Peter Guthrie Tait*, 1831 – 1901) за рјешавање проблема електрицитета и магнетизма и даље у физици. Са друге стране, Грасман (*Hermann Grassmann*, 1809 – 1877) је 1832. започео развој „новог геометријског рачуна“ да би 1844. стигао до Проширеног рачуна (*Ausdehnungslehre*), свог рада о векторима нажалост написаног на неразумљив начин за савременике.

Максвел (*James Clerk Maxwell*, 1831 – 1879) је подјелио све варијабле физике на скаларе и векторе и био заговорник чисте векторске анализе. Даље се векторски рачун развијао преко радова Клифорда (*William Kingdon Clifford*, 1845 – 1879) и његових Елемената динамике (1878.), термодинамике Гибса (*J. Willard Gibbs*, 1839 – 1903) и разноврсног Хеависидеа (*Oliver Heaviside*, 1850 – 1925).

18. Орјентисана дуж

18.1. Сабирање вектора

Дефиниција 16.1. За дуж кажемо да је **вектор** или **орјентисана дуж** ако је одређено која јој је од крајњих тачака почетна, а која је завршна.

Вектор има **интензитет**, **правац** и **смјер**. Када је задан вектор ***AB***, интензитет вектора је дужина, модул дужи *AB* од које је вектор настао и обиљежавамо га с |***AB***| . Правац вектора одређен је правом на којој вектор лежи, а смјер избором почетне и завршне тачке.

Дефиниција 18.1.2. Два вектора ***AB*** и ***CD*** су **једнака** ако имају исти интензитет, правац и смјер. Тада пишемо ***AB*** = ***CD***. Два вектора ***EF*** и ***GH*** су **супротни** ако имају исти интензитет и правац, а супротан смјер. Тада пишемо ***EF*** = **-*GH*.**

Вектор ***AB*** можемо означавати и са стрелицом изнад ознаке дужи $\overrightarrow{AB}$, или масним малим словом ***a***, односно стрелицом изнад слова $\vec{a}$.

Примјер 18.1.3. Једнакост вектора је релација еквиваленције у скупу вектора *V*.

Доказ: по дефиницији једнакости вектора имамо:
Р. $(\forall \boldsymbol{a} \in V)\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$;
С. $(\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V)\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$;
Т. $(\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V)\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \Rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}$, на основу транзитивности једнакости у скупу дужи и паралелности у скупу правих. ♦

Дефиниција 18.1.4. Збир два надовезана вектора ***AB*** и ***BC*** је вектор ***AC***, тј. ***AB*** + ***BC*** = ***AC***.

Збир два произвољна вектора је вектор једнак збиру надовезаних вектора, једнаких датим. Од вектора $\vec{a}$ одузимамо вектор $\vec{b}$ тако да вектору $\vec{a}$ додамо вектор супротан вектору $\vec{b}$, тј. додамо вектор $-\vec{b}$:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Примјер 18.1.5. Дат је четвороугао *ABCD* у простору. Тачке *M*, *N*, *P* и *Q* су средине страница редом *AB*, *BC*, *CD* и *DA*. Доказати да је четвороугао *MNPQ* паралелограм.

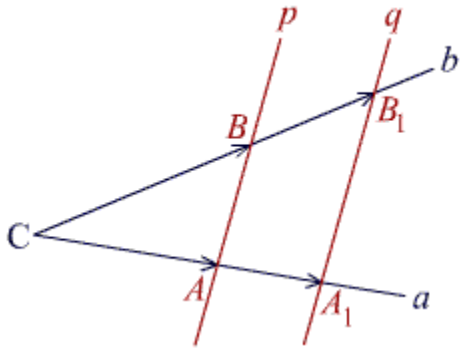
Доказ: Вектори $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$. Отуда $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}\right) = \vec{0}$, тј. $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{QP}$, што значи да су дужи *MN* и *QP* паралелне и једнаких дужина. Према томе, четвороугао *MNPQ* је паралелограм. ♦

Особине сабирања 18.1.6. Докажите $(\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V)$:
- Збир вектора је **комутативан**: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$;
- Збир вектора је **асоцијативан**: $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$.
- За множење вектора реалним бројем важи $(\forall k, m \in \boldsymbol{R})$:
    1. $k \cdot (m\boldsymbol{a}) = (km)\boldsymbol{a}$;
    2. $(k + m)\boldsymbol{a} = k\,\boldsymbol{a} + m\,\boldsymbol{a}$;
    3. $k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\,\boldsymbol{a} + k\,\boldsymbol{b}$;
    4. $1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.

Примјер 18.1.7. (*Талесова теорема*) Ако паралелне праве *p* и *q* пресјецају праву *a* у тачкама *A* и A_1, а праву *b* у тачкама *B* и B_1 и ако је *C* заједничка тачка правих *a* и *b*, доказати помоћу вектора да тада важи:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CA}{CA_1} = \frac{CB}{CB_1}.$$

Доказ: На сљедећој слици видимо, вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ имају исти правац



(колинеарни су), па је $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{A_1B_1}$, одакле $\frac{AB}{A_1B_1} = |k|$. Из троуглова ABC и A_1B_1C имамо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{CB_1} - \overrightarrow{CA_1}$. Замјеном у претходну векторске једнакости добијамо $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = k \cdot \left(\overrightarrow{CB_1} - \overrightarrow{CA_1}\right)$, одакле је $\overrightarrow{CB} - k \cdot \overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{CA} - k \cdot \overrightarrow{CA_1}$. Праве a и b нису паралелне, па је посљедња једнакост могућа само ако су љева и десна страна једнакости нула вектори, одакле је $\overrightarrow{CB} = k \cdot \overrightarrow{CB_1}$ и $\overrightarrow{CA} = k \cdot \overrightarrow{CA_1}$, односно: $\frac{AB}{A_1B_1} = |k| = \frac{CA}{CA_1} = \frac{CB}{CB_1}$, што је и требало доказати.♦

Дефиниција 18.1.8. Јединични вектор, орт вектора $\vec{a}$ је $\overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{|a|}$.

Задаци 18.1.9.

1. Ако је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ онда је и $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

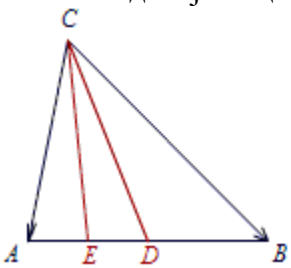
2. Дат је паралелограм $ABCD$.

а) Изразити векторе дијагонала $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ помоћу вектора страница $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

б) Изразити векторе страница $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ помоћу вектора дијагонала $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

3. Дат је једанкокраки трапез $ABCD$ чији краци AD и BC су нагети под углом 60° према основици AB. Оба крака AD, BC и основица CD су дужине 3. Тачке M, N и P су средине страница AB, BC и CD. Јединични вектори страница AB и AD су $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Помоћу ових јединичних вектора изразити векторе: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{NM}$.

4. На сљедећој слици дати су вектори $\overrightarrow{CA} = \vec{u}$ и $\overrightarrow{CB} = 2\vec{v}$. Средина дужи AB је тачка D, средина дужи DE је E. Помоћу вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ изразити векторе: **а)** $\overrightarrow{AB}$; **б)** $\overrightarrow{AE}$; **в)** $\overrightarrow{CE}$.



$[2\vec{v} - \vec{u};\ \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{4}\vec{u};\ \frac{3}{4}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}]$

5. Доказати помоћу вектора да је срења линија троугла паралелна основици и једнака њеној половини.

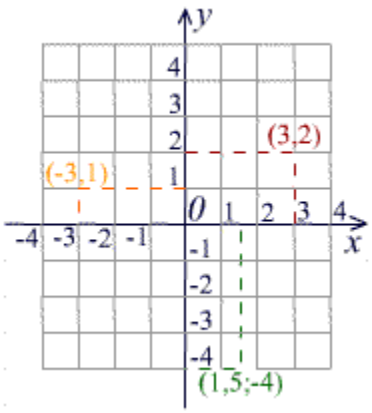
6. Доказати да је средња линија трапеза паралелна основици и једнака половини збира основица.

7. За било које четири тачке простора *A*, *B*, *C*, *D* је $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

8. Ако је тачка *T* тежиште троугла *ABC*, онда је $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\vec{0}$.

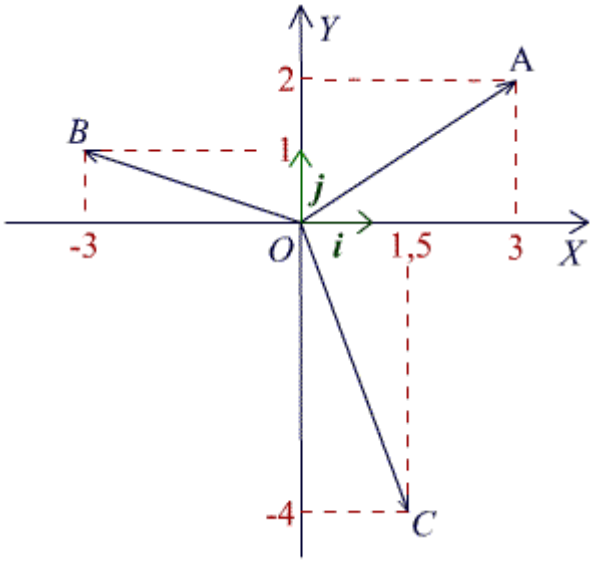
18.2. Декартове координате

Картезијев, или **Декартов** правоугли **систем** координата одређује сваку тачку у равни јединствено помоћу пара њених координата. Координате су пројекције Тачке (3,2), (-3,1), или (1,5;-4) на двије окомите осе бројева **апсцису** (x – оса) и **ординату** (y – оса) једнаких јединица дужина, са исходиштима бројева у пресјеку оса (тачка *O*), као на слици лијево.



У 3-димензионалном Декартовом правоуглом систему координата тачку представљамо уређеним низом три координате, њеним пројекцијама на узајамно окомите осе бројева: апсцису, ординату и **апликату** (*z* – оса). Ове осе су такође једнако баждарене, са исходиштима бројева у њиховом пресјеку.

Тачке можемо писати у облику хоризонталног (3,2), (-3,1), (1,5;-4), или вертикалног $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1{,}5\\4\end{pmatrix}$ низа координата. Прве су дефинисане помоћу врста, а друге помоћу колона бројева.



Аналогно ознакама из геометрије, тачке пишемо и великим словима абецеде *A* = (3,2), *B* = (-3,1), *C* = (1,5;-4), или краће *A*(3,2), *B*(-3,1), *C*(1,5;-4).

Овакве тачке дефинишу **врхове (тзв. радијус) вектора** чији почеци су у исходишту координатног система: $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}+2\vec{j}$, $\overrightarrow{OB}=-3\vec{i}+\vec{j}$, $\overrightarrow{OC}=1{,}5\vec{i}-4\vec{j}$, гдје су $\vec{i}$, $\vec{j}$ (и $\vec{k}$) јединични вектори, ортови координатних оса редом апсцисе, ординате (и апликате).

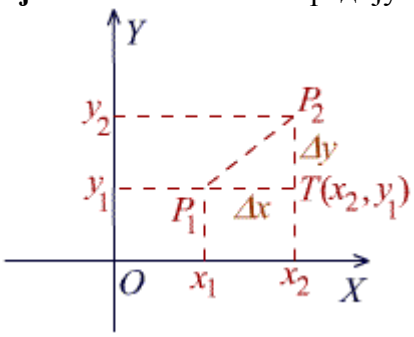
Радијус вектор као и вектор – орјентисана дуж одређен је својим правцем, смјером и интензитетом. Радијус вектор и вектор – орјентисана дуж су једнаки ако и само

ако имају исти правац, смјер и интензитет. Два радијус вектора су једнака ако и само ако им је врх у истој тачки.

На слици десно је Рене Картезијус Декарт (фра. *René Descartes*, лат. *Renatus Cartesius*, 1596–1650.) француски математичар и филозоф који је у свом раду Геометрија (*La Géométrie*, 1637.) увео у математику основне принципе и технике координатне геометрије. Тај рад је започео са проблемом дефинисања положаја линијама, затим се бавио одређивањем тангенти на криве. На крају се бавио и рјешавањем једначина степена већег од два, открившри правило које данас зовемо Декартово правило знакова. Увео је данашње означавање.

Примјер 18.2.1. Изразити интензит радијус вектора координатама.

Рјешење: Интензитет радијус вектора чији су врхови $A(3,2)$, $B(-3,1)$ и $C(1,5;-4)$ је $\sqrt{13}$, $\sqrt{10}$ и $\sqrt{18{,}25}$, што добијамо помоћу Питагорине теореме.

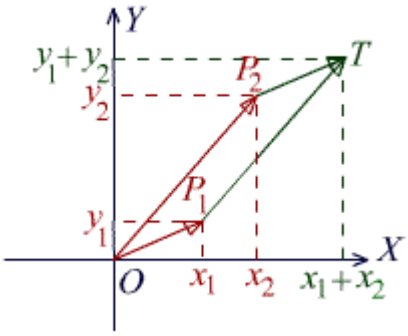


Уопште, удаљеност између двије тачке $P_1(x_1,y_1)$ и $P_2(x_2,y_2)$, на слици лијево, рачунамо као хипотенузу правоуглог троугла P_1P_2T, чије су катете $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$. Тражена хипотенуза је $\overline{P_1P_2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, тј. $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Посебно, ако је прва од тачака исходиште координатног система $O(0,0)$, а друга тачка врх радијус вектора $A(x,y)$ добићемо дужину радијус вектора $\overline{OA} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Отуда, за претходно поменуто $A(3,2)$ имамо $\overline{OA} = \sqrt{3^2 + 2^2}$, тј. $\overline{OA} = \sqrt{13}$. ♦

Радијус векторе, као и векторе орјентисане дужи сабирамо надовезивањем. Векторе сабирамо додајући њихове одговарајуће координате, прву првој, другу другој (трећу трећој). Вектор множимо бројем множећи сваку од његових координата тим бројем. Такође, важе претходне особине (16.1.6.) вектора.

Примјер 18.2.2. Представити збир радијус вектора $\overrightarrow{OP_1}$ и $\overrightarrow{OP_2}$ радијус вектором.

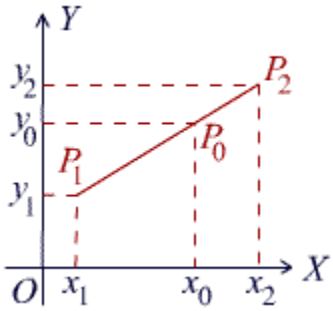
Рјешење: Нека су дати врхови радијус вектора $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$, као на као на слици десно. Када на вектор $\overrightarrow{OP_1}$ надовежемо вектор $\overrightarrow{OP_2}$ врх вектора долази у тачку $T(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Тиме је дефинисан нови радијус вектор $\overrightarrow{OT}$.



Према томе је збир радијус вектора радијус вектор чији врх је збир одговарајућих координата, тј.
$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.♦

Примјер 18.2.3. Дати су врхови радијус вектора $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$. Наћи радијус вектор чији врх P_0 дијели дуж P_1P_2 у односу a:b.

Рјешење: На сљедећој слици је $P_1P_0 : P_0P_2 = a : b$. Тада је такође $(x_0 - x_1) : (x_2 - x_0) = a : b$ и $(y_0 - y_1) : (y_2 - y_0) = a : b$. Отуда, рјешавањем пропорција добијамо $x_0 = \frac{bx_1 + ax_2}{a+b}$ и $y_0 = \frac{by_1 + ay_2}{a+b}$, координате врха траженог вектора $\overrightarrow{OP_0}$. Посебно, ако је $a : b = 1 : 1$, тада је тачка $P_0(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$ тачно на средини дужи P_1P_2.♦



Линеарна комбинација вектора $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n$ различитих од нуле је збир

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + ... + k_n\boldsymbol{x}_n,$$

где су $k_1, k_2, ..., k_n$ реални бројеви, $n = 1, 2, 3, ...$.

Дефиниција 18.2.4. Ако постоје бројеви $k_1, k_2, ..., k_n$ од којих је бар један различит од нуле, такви да је

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + ... + k_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0},$$

онда кажемо да су вектори $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n$ линеарно зависни. Ако је наведена једнакост испуњена једино за $k_1 = k_2 = ... = k_n = 0$, онда кажемо да су вектори $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n$ линеарно независни.

Примјер 18.2.5. Ако су вектори $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ линеарно независни, показати да су вектори $\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{z} = 3\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{k}$ компланарни.

Рјешење: Довољно је показати да постоје бројеви a и b такви да је $\boldsymbol{z} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}$. Дакле, да је $3\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{k} = a(3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}) + b(\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k})$, односно еквивалентно $(3 - 3a)\boldsymbol{i} + (2a - b)\boldsymbol{j} + (-6 + 3b)\boldsymbol{k} = 0$, одакле слиједи $a = 1$, $b = 2$.♦

Из наведеног примјера видимо како нас разлагање вектора на компоненте доводи до рјешавања система линеарних једначина.

Два линеарно независна вектора $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ граде базу 2-димензионалног векторског простора V_2 вектора облика $a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}$, гдје су a и b произвољни реални бројеви. Примјер таквог простора је координатна раван са базним векторима јединичним векторима координатних оса OX и OY, ортовима $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$. Три линеарно независна вектора $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ граде базу 3-димензионалног векторског простора V_3 вектора облика $a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} + c\boldsymbol{z}$, гдје су a, b и c произвољни реални бројеви. Примјер је Декартов правоугли систем координата OX, OY и OZ са векторима базе ортовима $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$.

Теорема 18.2.6. Ако су $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ линеарно независни вектори простора V_3, онда за било који вектор $\boldsymbol{v} \in V_3$ постоје јединствени реални бројеви a, b, c такви да је $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} + c\boldsymbol{z}$.

Доказ: Заиста, ако за неки вектор $\boldsymbol{v}$ дефинишемо реалне бројеве a_1, b_1, c_1 и бројеве a_2, b_2, c_2 такве да је $\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{x} + b_1\boldsymbol{y} + c_1\boldsymbol{z} = a_2\boldsymbol{x} + b_2\boldsymbol{y} + c_2\boldsymbol{z}$, тада одузимањем и сређивањем добијамо $(a_2 - a_1)\boldsymbol{x} + (b_2 - b_1)y + (c_2 - c_1)\boldsymbol{z} = 0$. Како су вектори $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ линеарно независни то је посљедња једнакост могућа једино за $a_2 - a_1 = 0$, $b_2 - b_1 = 0$, $c_2 - c_1 = 0$, тј. за $a_2 = a_1$, $b_2 = b_1$, $c_2 = c_1$.♦

Задаци 18.2.7.

1. Дате су тачке $A(3,1)$ и $B(-1,3)$. Помоћу вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ изразити векторе:
а) $5\cdot\overrightarrow{OA} - 3\cdot\overrightarrow{OB}$; **б)** $\vec{i}$; **в)** $\vec{j}$; **г)** $\overrightarrow{OC}$, гдје је $C(5,4)$.

2. Дате су тачке $A(-2,3)$ и $B(1,2)$. Наћи вектор $\overrightarrow{OC}$ чији врх дијели дуж AB у односу:
а) 2:3; **б)** 3:4; **в)** 5:1; **г)** 4:5.

3. Да ли су линеарно независни вектори:
а) (7, -5, 1), (4, 2, 3) и (-13, -11, -2); **б)** (-1, 5, 2), 2, 1, -3) и (3, -2, -4);
ако су зависни, помоћу прва два изразити трећи.

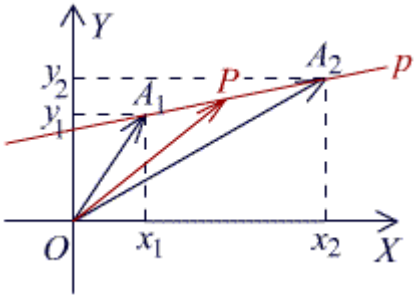
4. Дате су тачке $A(-1, -3)$, $B(5, 1)$, $C(-2, 2)$.
а) Наћи векторе страница троугла ABC.
б) Наћи векторе тежишница троугла ABC.
в) Наћи интензитет вектора $\overrightarrow{OA}$, дужину странице AB, и тежишнице t_A.

5. Нека су A, B, C, D средине страница четвороугла $P_n(x_n, y_n)$, $n = 1, 2, 3, 4$.
а) Изразити векторе $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ помоћу координата x_n, y_n.
б) Доказати да се дужи AC и BD узајамно полове.

6. Дати су базни вектори $\boldsymbol{u}(2,-1)$ и $\boldsymbol{v}(1,3)$. Изразити помоћу њих векторе:
а) (4,5); **б)** (-3,2); **в)** (7,-1); **г)** (-2,-5).

18.3. Једначина праве

Права p у координатној равни, која пролази кроз двије тачке $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ садржи све векторе облика $\lambda \cdot \overrightarrow{A_1A_2}$, гдје је λ произвољан реалан број, тзв. скалар. На примјер, ако је тачка P тачно на средини дужи A_1A_2, као на сљедећој слици, тада су њене координате $P\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Вектор чији врх је на тој правој $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA_1} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{A_1A_2}$. Уопште, ако тачка P припада правој A_1A_2, тада је вектор $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA_1} + \lambda \cdot \overrightarrow{A_1A_2}$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Тиме је доказан сљедећи став.



Став 18.3.1. Векторски облик једначине праве је $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, гдје су дати радијус вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и права и вектор $\vec{b}$ паралелан са датом правом. Врх вектора $\vec{r}$ је на датој правој.

Векторски облик једначине праве (18.3.1.) не зависи од начина писања вектора (редак, односно стубац), нити од броја координата (двије, или више димензија простора).

Ако векторски облик једначине праве напишемо у координатном облику, рецимо помоћу вектора колона $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ лакше видимо да је $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + \lambda b_1 \\ a_2 + \lambda b_2 \end{pmatrix}$.
Отуда:

Став 18.3.2. Параметарски ($\lambda \in \mathbf{R}$) облик једначине праве која садржи дате тачке $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$ је:

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda b_1, \\ y = a_2 + \lambda b_2. \end{cases}$$

Тачка са координатама x и y припада поменутој правој $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Даље, из параметарских једначина налазимо $\lambda = \dfrac{x - a_1}{b_1}$ и $\lambda = \dfrac{y - a_2}{b_2}$, тј.

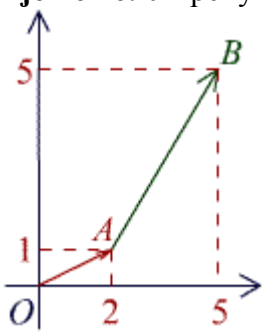
Став 18.3.3. Декартов (Картезијев) облик једначине праве која садржи дате тачке $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$ је:

$$\frac{x - a_1}{b_1} = \frac{y - a_2}{b_2}.$$

Овај посљедњи облик нам је од раније познат. Множењем једнакости са b_1b_2 и сређивањем добијамо $b_2x - b_1y = a_1b_2 - a_2b_1$, односно $ax + by = c$.

Примјер 18.3.4. Нађи вектор брзине и брзину тијела чији је вектор положаја дефинисан са $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, гдје вектори $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ представљају помјерање по 1 километар у правцу истока и сјевера, а параметар t је вријеме у часовима.

Рјешење: У тренутку $t = 0$ тијело се налази у тачки $A = (2, 1)$, а након једног часа у тачки $B = (5, 5)$, као на слици лијево. Јединица дужине је километар. То значи да је вектор брзине тијела $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Брзина тијела је $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ километара на час.



Тјело се креће по правој линији почев од тачке $A(2, 1)$, преко тачке $B(5, 5)$ сталном брзином 5 км/час. ♦

Задаци 18.3.5.

1. Нађи векторску једначину праве дате у Декартовом облику:

а) $x + y = 5$; **б)** $x - y = 3$; **в)** $2x + 3y = 5$.

2. Нађи векторску једначину праве која пролази кроз дату тачку A и паралелна је датом вектору $\boldsymbol{v}$:

а) $A(2, 3)$, $\boldsymbol{v} = 5\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$; **б)** $A(-1, 2)$, $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$; **в)** $A(2, -3)$, $\boldsymbol{v} = -2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$.

3. Дата је векторска једначина праве $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 - 3\lambda \\ 1 + 4\lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

а) Написати је у стандардном облику $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$;

б) Нађи јединични вектор те праве;

в) Нађи Декартов облик те праве.

4. Наћи тачку пресјека правих одређених векторима $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$:

а) $\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \lambda(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j})$, $\boldsymbol{v}_2 = 5\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \mu(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$;

б) $\boldsymbol{v}_1 = (3, 5) + \lambda(-2, 1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4, -3) + \mu(-2, -5)$;

в) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 - 3\lambda \\ 4 + \lambda \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 + 2\mu \\ 4 - 3\mu \end{pmatrix}$.

5. Наћи тачку пресјека правих $\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ и $\frac{x-4}{3} = \frac{y+2}{5}$.

6. Права је дефинисана параметарским једначинама $x = 4 - 3t$, $y = -4 + 2t$.
а) Наћи координате три тачке на тој правој;
б) Наћи вриједност параметра t тачке (-47, 30);
в) Показати да тачка (-35, 23) не лежи на датој правој;
г) Наћи векторски облик те једначине праве.

7. Позиције вектора положаја $\boldsymbol{r}$ у км и вектора брзине $\boldsymbol{v}$ у км/час два чамца A и B (на мирној води) у неком тренутку су:

чамац A у тренутку 10:00 часова, $\boldsymbol{r}_A = 7\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v}_A = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$,
чамац B у тренутку 10:30 часова, $\boldsymbol{r}_B = 8\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v}_B = 4\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$.

а) Ако чамци наставе да плове овим брзинама, хоће ли се сударити?
б) Ако се сударе, наћи вријеме судара и вектор позиције судара. Ако се не сударају, одредити колико би чамац B требао бити испред да би се они сударили.

19. Матрице

Детерминанте и матрице су откриване у 18. и 19. стољећу. У почетку су оне развијане ради трансформација геометријских објеката и рјешавања система линеарних једначина. Данас их користимо много шире:

- У рјешавању система линеарних једначина;
- У теорији графова;
- У теорији игара;
- У криптографији;
- За фрактале;
- Равнотежу чврстог тијела (физика);
- Квантној и космичкој механици;
- У компјутерској графици и компјутерској томографији;
- У економији (нпр. *Leontief model*);
- У генетици;
- итд.

19.1. Основне операције

Претпоставимо да имамо двије фамилије Φ_1 и Φ_2 које имају редовне мјесечне трошкове за набавку хљеба, млијека и јаја. Фамилија број j ($j = 1, 2$) мјесечно купује a_{j1} килограма хљеба, a_{j2} литара млијека и a_{j3} комада јаја:

Фамилија	Хљеб	Млијеко	Јаја
Φ_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
Φ_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}.

На основу ових података дефинишемо Мјесечну матрицу ових фамилија.

$$\text{Мјесец} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Наша **матрица** $\boldsymbol{M}$ има 2 **ретка** (тзв. врсте) и 3 **колоне**, она је **типа** 2×3. Понекад пишемо $\boldsymbol{M}_{2\times3}$, или $\boldsymbol{M}_{2,3}$. Када би број редова неке матрице био једнак броју њених колона (нпр. 3) то би била **квадратна матрица** (типа 3). Умјесто тип матрице кажемо и **ред матрице**. Умјесто облих заграда, матрице ограничавамо и угластим, или двоструким усправним, али не и једноструким усправним које су резервисане за детерминанте.

Дефиниција 19.1.1. Двије матрице су једнаке ако и само ако су истог типа (реда) и имају све одговарајуће елементе међусобно једнаке.

Прецизније, ако су $A = \|a_{jk}\|$ и $B = \|b_{jk}\|$ двије матрице типа $m\times n$, тада је $A = B$ ако и само ако важи свих $m\times n$ једнакости $a_{jk} = b_{jk}$ ($j = 1, 2, ..., m$; $k = 1, 2, ..., n$).

Рецимо да током два мјесеце A и B, ове фамилије имају сљедеће набавке

$$A = \begin{pmatrix} 40 & 35 & 280 \\ 50 & 42 & 320 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 38 & 32 & 175 \\ 46 & 38 & 316 \end{pmatrix},$$

онда су њихове укупне набавке за та два мјесеца:

$$A + B = \begin{pmatrix} 40+38 & 35+32 & 280+175 \\ 50+46 & 42+38 & 320+316 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 & 67 & 455 \\ 96 & 80 & 636 \end{pmatrix}.$$

Дефиниција 19.1.2. Збир матрица једнаког типа (реда) једнак је матрици истог типа чији се елементи добију сабирањем одговарајућих почетних елемената.

Прецизније, ако су $A = \|a_{jk}\|$ и $B = \|b_{jk}\|$ двије матрице типа $m\times n$, тада је њихов збир матрица $C = A + B = \|c_{jk}\|$ истог типа гдје је $c_{jk} = a_{jk} + b_{jk}$ ($j = 1, 2, ..., m$; $k = 1, 2, ..., n$).

Из овог правила произилази да је сабирање матрица асоцијативно и комутативно. Такође, све матрице истог типа имају једну нулту матрицу, чији су сви елементи нуле а која је неутрална на сабирање.

Затим је могуће досљедно дефинисати множење матрице бројем, скаларом. На примјер, двоструки трошкови за исти мјесец претпостављених фамилија значили би удвостручавање свих датих почетних елемената. Аналогно, уопште за скалар $\lambda \in \mathbf{R}$ биће:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \end{pmatrix}.$$

Правило 19.1.3. Производ реалног броја и матрице једнак је матрици истог типа чији се елементи добију множењем датог броја са свим одговарајућим почетним елементима.

Прецизније, ако је $A = \|a_{jk}\|$ матрица и $\lambda \in \boldsymbol{R}$, тада је производ $\lambda \cdot A$ матрица $\|\lambda \cdot a_{jk}\|$.

Елементи наших матрица су реални бројеви, укључучујући негативне, па у складу са претходним правилима имамо сљедеће.

Правило 19.1.4. Разлика матрица једнаког типа једнака је матрици истог типа чији се елементи добију одузимањем одговарајућих почетних елемената.

Нпр. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 1 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 9 \\ -12 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 & -2-7 \\ -5-4 & 1-9 \\ 0-(-12) & 13-(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -9 \\ -9 & -8 \\ 12 & 19 \end{pmatrix}.$

У односу на операцију сабирања, свака матрица A има инверзну, матрицу A' истог типа чији су одговарајући елементи негативни бројеви дате, тако да је њихов збир нулта матрица.

Став 19.1.5. За исти тип матрица важе правила:

1. $(\forall \boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})\ \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$ (асоцијација);
2. $(\forall \boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\ \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$ (комутација);
3. $(\exists_1 \boldsymbol{O})(\forall \boldsymbol{A})\ \boldsymbol{A} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ (неутрални елеменат);
4. $(\forall \boldsymbol{A})(\exists \boldsymbol{A'})\ \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A'} = \boldsymbol{A'} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$ (инверзни елеменат).

Погледајмо поново примјер са претпостављеним фамилијама да бисмо разумјели множење матрица. Ако множимо нашу матрицу $\boldsymbol{M}$ која садржи количине килограма хљеба, литара млијека и комада јаја са цјенама ових артикала добићемо укупни мјесечни трошак за те производе, истих фамилија током једног мјесеца. Нека хљеб, млијеко и јаја у продавници $\boldsymbol{P}$ коштају p_1, p_2 и p_3 новчаних јединица, писано одозго према доле:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

Тада производ има смисла ако га овако дефинишемо:

$$\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}.$$

Дакле $\boldsymbol{M}_{2,3} \times \boldsymbol{P}_{3,1} = \boldsymbol{T}_{2,1}$. Смисао овог производа, матрице $\boldsymbol{T}_{2,1}$ је укупни мјесечни трошак за фамилију из појединог ретка.

Када се дате фамилије снабдјевају из још једне продавнице, са цијенама хљеба, млијека и јаја редом:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix},$$

имаћемо сличан резултат множења матрица $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{Q}$. Штавише, могуће је уредно спаковати алтернативне укупне трошкове ових фамилија у једну матрицу цијена:

$$\boldsymbol{S} = \| \boldsymbol{P} \ \ \boldsymbol{Q} \| = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{pmatrix},$$

са одговарајућим сљедећим правилом множења, $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{S} =$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1p_1 + b_1p_2 + c_1p_3 & a_1q_1 + b_1q_2 + c_1q_3 \\ a_2p_1 + b_2p_2 + c_2p_3 & a_2q_1 + b_2q_2 + c_2q_3 \end{pmatrix}.$$

Примјетимо да при множење матрица број колона прве мора бити једнак броју врста друге. Резултат множења је матрица са онолико врста колико је има прва, а колона колико има друга. Уопште $\boldsymbol{A}_{\mathrm{m,n}} \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{n,p}} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{m,p}}$. Већ због тога множење матрица није комутативно.

Правило 19.1.6. Матрице типа $m \times n$ и $n \times p$ ($m, n, p \in \mathbf{N}$) множимо тако да n елемената j-тог ($j = 1, 2, ..., m$) ретка прве матрице множимо редом са одговарајућих n елемената k-те ($k = 1, 2, ..., p$) колоне друге, ових n производа сабирамо и збир смјештамо на позицију j-тог ретка, k-те колоне резултирајуће матрице.

Прецизније, ако је $A = \|a_{jk}\|$ матрица типа $m\times n$ и $B = \|b_{jk}\|$ матрица типа $n\times p$, тада је њихов производ матрица $C = AB = \|c_{jk}\|$ типа $m\times p$, гдје је $c_{jk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}b_{ik}$.

Другим рјечима, ако су дате матрице $\boldsymbol{A}_{\mathrm{m,n}}$ и $\boldsymbol{B}_{\mathrm{n,p}}$ чији производ је матрица $\boldsymbol{C}_{\mathrm{m,p}}$ онда можемо симболично написати $c_{\mathrm{jk}} = \Sigma a_{\mathrm{ji}}b_{\mathrm{ik}}$ гдје се сабира по индексу $i = 1, 2, ..., n$.

Множењем физичких величина добијамо нове физичке величине. Рецимо, множењем брзине (у км/час) и времена (часови) добијамо пут (км). Слично томе, овдје смо множећи број комада артикла са са цијеном добили укупни трошак. Међутим, у математици то није уобичајено.

Особине 19.1.7. Ако је дато множење матрица A, B и C могуће, онда је:

- $A(BC) = (AB)C$ – закон асоцијације;
- $A(B + C) = AB + AC$ – закон дистрибуције с лијева;
- $(A + B)C = AC + BC$ – закон дистрибуције с десна.

За множење матрица не важи закон комутације.

Примјер 19.1.8. У двије посуде P_1 и P_2 имамо по x и y литара течности. Одвојимо 20% течности из прве посуде и 30% из друге и замјенимо им мјеста. Затим поступак понављамо. Дефинисати матрицу премјештања течности.

Рјешење: Након првог премјештања, запремина течности у посудама P_1 и P_2 је:

$$x_1 = 0{,}8x + 0{,}3y,$$
$$y_1 = 0{,}2x + 0{,}7y.$$

То можемо писати матрично: $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, односно $MX = X_1$.

Након другог премјештања, количина течности у посудама је:

$$x_2 = 0{,}8x_1 + 0{,}3y_1,$$
$$y_2 = 0{,}2x_1 + 0{,}7y_1.$$

То пишемо матрично: $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, односно $MX_1 = X_2$, те $M^2X = X_2$, гдје је

$M^2 = M\cdot M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$. Дакле,

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}8\cdot 0{,}8 + 0{,}3\cdot 0{,}2 & 0{,}8\cdot 0{,}3 + 0{,}3\cdot 0.7 \\ 0{,}2\cdot 0{,}8 + 0{,}7\cdot 0{,}2 & 0{,}2\cdot 0{,}3 + 0{,}7\cdot 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}70 & 0{,}45 \\ 0{,}30 & 0{,}55 \end{pmatrix}.$$

Даље имамо $M^3 = M^2\cdot M$, $M^4 = M^3\cdot M$, ..., $M^n = M^{n-1}\cdot M$, гдје $n = 1, 2, 3, ...$.

Уопште, након n-тог премјештања ($n = 1, 2, 3, ...$), запремине су:

$$x_n = 0{,}8x_{n-1} + 0{,}3y_{n-1},$$

$$y_n = 0{,}2x_{n-1} + 0{,}7y_{n-1}.$$

Матрично: $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$, односно $MX_{n-1} = X_n$, те $M^nX = X_n$.♦

Задаци 19.1.9.

1. Дате су три матрице $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -8 & 17 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 12 \\ 13 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Израчунати матрице $2B$, $A + C$, $3A - 2C$, $A \times B$, $B \times A$.

2. Нула матрица има све елементе нуле. Наћи вриједност параметара тако да је сљедећи збир нулта матрица:

$$5\begin{pmatrix} -a-21 & b \\ -c & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4b & 5c \\ a & b \end{pmatrix}.$$

3. Наћи x ако је

а) $x\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7a & 2b \\ 9a & -3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4b & -5c \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$;

б) $x^2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 7 & 30 \end{pmatrix}$.

4. За $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ наћи производе $A \times A = A^2$, $A^2 \times A = A^3$ и $A^3 \times A = A^4$. Доказати да је $A^{2n} = \begin{pmatrix} 3^{2n} & 0 \\ 0 & 3^{2n} \end{pmatrix}$ гдје је n природан број.

5. Ако је $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ доказати да је $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$, гдје је n природан број.

6. Колике су почетне запремине течности у примјеру 19.1.7. ако након првог премјештања у посудама P_1 и P_2 имамо a и b литара течности, посебно, ако су a и b редом 3 и 2 л?

7. Ацо, Борис и Владо купују бисквите различитих произвођача П1, П2 и П3. Ацо узима 10 пакета од П1, 7 од П2 и 3 од П3. Борис узима 4 од П1, 8 од П2 и 10 пакета од П3. Владо узима 4 од П1, 7 од П2 и 8 од П3. Ако производ П1, П2 и П3 коштају редом 4, 5 и 6 новчаних јединица сваки, помоћу матрица наћи количину новца коју троши сваки од ових купаца.

[матрица купаца пута цијена = 93, 116, 99]

8. Фабрика производи производе *A*, *B* и *C* за које им требају материјали *P*, *Q* и *R*. Требовање по јединици сваког од производа за сваким од материјала је:

	P	***Q***	***R***
A	2	3	1
B	4	2	5
C	2	4	2

Помоћу матрица, наћи:
а) Укупне потребе сваког од материјала ако фирма произведе 100 јединица сваког од производа;
б) Трошак производње по јединици сваког од производа, ако материјали *P*, *Q* и *R* коштају редом 5, 10 и 5 новчаних јединица;
в) Укупни трошак производње када фирма произведе по 200 јединица сваког од производа.

[(800, 900, 800); (45, 65, 60); 34000]

19.2. Инверзна матрица

Квадратне матрице су оне које имају једнак број редова и колона. Тај број називамо **ред**, или тип квадратне матрице. Матрица $\boldsymbol{A} = \|a_{jk}\|$ реда (типа) $m \times n$ је квадратна ако је $m = n$ и тада пишемо $\boldsymbol{A}_n$. На примјер, матрице

$$(a_{11}),\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ \ldots,\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

су квадратне реда 1, 2, 3, ... , n. Елементи **главне дијагонале** квадратне матрице су a_{ii} ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Квадратне матрице *A* и *B* истог реда можемо множити у оба редосљеда, али резултати не морају бити једнаки. Може бити $AB \neq BA$ јер множење матрица **није комутативно**.

Јединична матрица *I* је квадратна матрица чији сви елементи на главној дијагонали су јединице, а сви остали елементи нуле.

Јединичну матрицу можемо дефинисати и са $\boldsymbol{I} = \|\delta_{jk}\|$, гдје је **Кронекеров делта симбол**

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

На примјер, јединична матрица другог реда је: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Други примјер, ако су квадратна матрица *A* и јединична матрица *I* истог реда тада је увијек

$$AI = IA = A.$$

Ако је $\boldsymbol{A}$ квадратна матрица реда n и ако постоји квадратна матрица $\boldsymbol{X}$ истог реда таква да је $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{XA} = \boldsymbol{I}_n$ онда матрицу $\boldsymbol{X}$ називамо **инверзна матрица** матрице $\boldsymbol{A}$ и означавамо је $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Став 19.2.1. Ако је $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ онда је $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Доказ: $AA^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = I.$

$A^{-1}A = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = I.$ ♦

Детерминанту квадратне матрице $\boldsymbol{A}$ означавамо det $\boldsymbol{A}$. Посебно, детерминанта матрице из претходног става (19.2.1.) је

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc\,,$$

тј. то је број у називнику инверзне матрице. Према томе, ако је det $A = 0$ тада A^{-1} нема смисла (дјељење нулом) па кажемо да је A **сингуларна** матрица и да нема инверзну матрицу; ако је det $A \neq 0$ тада кажемо да је A **регуларна** и имамо инвезну матрицу која је дата ставом (19.2.1.).

Примјер 19.2.2. Рјешити систем линеарних једначина помоћу матрица:

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ -5x + 3y = 6. \end{cases}$$

Рјешење: Дати систем је еквивалентан матричној једначини AX = B, тј. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$. Налазимо det $A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 1$, па $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.
Множећи матричну једначину с лијева са A^{-1} имамо $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$, те $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$, односно $IX = A^{-1}B$, тј. $X = A^{-1}B$. Према томе,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21+6 \\ 35+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 47 \end{pmatrix}.$$

Дакле, рјешење је $x = 27$, $y = 47$.
Провјера: $2\cdot 27 - 47 = 7$ (тачно), $-5\cdot 27 + 3\cdot 47 = 6$ (тачно!). ♦

Транспонована матрица A^{T} се добија замјеном врста колонама матрице A. Елеменат у 2. врсти и 3. колони постаје елеменат у 3. врсти и 2. колони. На примјер

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Прецизније, Ако је $A = \|a_{jk}\|$ матрица типа $m \times n$, матрица $B = \|b_{jk}\|$ типа $n \times m$, гдје је $b_{jk} = a_{kj}$ ($j = 1, 2, ..., n$; $k = 1, 2, ..., m$) назива се транспонована матрица матрице A и означава A^T, или A'.

Кофактори елемената квадратних матрица су исто што и кофактори елемената њихових детерминанти (примјер 16.2.4.). За матрицу $A = \|a_{jk}\|$ реда n кофактор елемента a_{jk} је број $A_{jk} = (-1)^{j+k} D_{jk}$, гдје је D_{jk} детерминанта која се добија из det A изостављањем j-те врсте и k-те колоне. Матрица $\|A_{jk}\|^T$ реда n назива се **адјунгована матрица** матрице A и означава adj A.

Став 19.2.3. Ако је det $A \neq 0$, тада је $A^{-1} = \dfrac{\text{adj } A}{\det A}$.

Задаци 19.2.4.

1. Наћи детерминанту и ако је могуће инвезну матрицу за:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. За које вриједности параметра је дата матрица сингуларна?

а) $\begin{pmatrix} k & 3 \\ 2 & k+1 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} m-5 & 2 \\ 3 & m \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}$.

3. Рјешити систем линеарних једначина помоћу матрица и провјерити рјешења:

а) $\begin{matrix} 4x - 5y = 2 \\ 3x + y = 6; \end{matrix}$ **б)** $\begin{matrix} 7x + 3y = 10 \\ 6x - 5y = 4; \end{matrix}$ **в)** $\begin{matrix} -9x + 6y = 15 \\ 6x - 4y = -10; \end{matrix}$

4. Дата је матрица $A(x) = \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2(1-x) & 2x-1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbf{R}$. Одредити редом:

i. $A(a) \cdot A(b)$; **ii.** $A^2(a)$; **iii.** $A^n(a)$, $n \in \mathbf{N}$.

5. Одредити матрицу X другог реда која испуњава услов:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Одредити све матрице X такве да је: $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ -1 & 5\end{pmatrix}$.

$[\begin{pmatrix}-2a-1 & -2b+5\\ a & b\end{pmatrix}$, a и b произвољни]

7. Наћи све матрице другог реда чији квадрат је нула матрица.

$[\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}$, $a^2 = -bc]$

8. Рјешити систем линеарних једначина помоћу матрица:

а)

$$\begin{cases}10x-9z=19\\ 8x-y=10\\ y-12z=10;\end{cases}$$

б)

$$\begin{cases}\lambda x+y+z=1\\ x+\lambda y+z=1\\ x+y+\lambda z=1.\end{cases}$$

$[(1, -2, -1); \ \frac{(\lambda-1)(1,1,1)}{(\lambda+1)(\lambda-2)}]$

9. Рјешити по X матричне једначине:

1. $AX = B$, 2. $XA = B$, 3. $AX = BA^{-1}B$, 4. $XA = BA^{-1}B$, гдје је

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

10. Аутомобилска компанија користи три врсте метала М1, М2 и М3 за производњу три типа аутомобила Т1, Т2 и Т3. Потреба за металима по типу аутомобила у тонама, дата је дата је сљедећом табелом.

	М1	**М2**	**М3**
Т1	2	3	4
Т2	1	1	2
Т3	3	2	1

Наћи број аута сваког од типова који се могу произвести коришћењем 29, 13 и 16 тона метала од дате три врсте редом.

[систем једначина: 2, 3 и 4]

19.3. Још неке особине матрица

Скуп свих матрица истог типа над скупом реалних бројева (у пољу **R**), са операцијама сабирања матрица и множења матрица реалним бројем, као што смо претходно дефинисали, **има структуру векторског простора** над **R**. То значи да скуп свих матрица има особине наведене у сљедећем ставу, који због једноставности не доказујемо.

Став 19.3.1. Ако су A и B матрице типа $m\times n$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, тада је

- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$,
- $1 \cdot A = A$.

Аналогно векторима орјентисаним дужима (18.2.4.) имамо **линеарну комбинацију матрица** $A_1, A_2, ..., A_k$ истог типа $(m \times n)$ у изразу

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_k A_k = \sum_{r=1}^{k} \alpha_r A_r ,$$

гдје скалари $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbf{R}$. Димензија векторског простора матрица једнака је производу mn.

Примјетили смо да **множење** матрица у општем случају **није комутативно**. На примјер,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ али } \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Међутим, јединична матрица $I_n = (\delta_{jk})_n$ је комутативна са сваком матрицом са којом има смисла њен производ; затим, када постоје инверзне матрице су увијек узајамно комутативне. Са друге стране, **множење матрица је асоцијативно**, тј. за све матрице A, B, C за које производи $(AB)C$ и $A(BC)$ имају смисла, они су једнаки.

Став 19.3.2. Нека су $A = (a_{jk})_{m,n}$, $B = (b_{jk})_{n,p}$, $C = (c_{jk})_{p,q}$ матрице над **R**.
Тада је $(AB)C = A(BC)$.

Доказ: $(A \cdot B) \cdot C = (d_{jk})_{m,p} \cdot C = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} b_{ik}\right) c_{kr} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{ji} b_{jk} c_{kr} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ji} b_{jk} c_{kr} =$

$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kr}\right) = A \cdot (e_{jr})_{n,q} = A \cdot (B \cdot C)$. ♦

Додатак ставу 19.3.1. је сљедећи, који такође због једноставности не доказујемо.

Став 19.3.3. Ако су A, B, C, D, матрице над пољем **R** истог типа $m \times n$ и $\alpha \in \mathbf{R}$, тада је

- $C(A + B) = CA + CB$,
- $(A + B)C = AC + BC$,
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Ако је A квадратна матрица реда n. Тада дефинишемо потенције $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A^2$, $A^4 = A \cdot A^3$, итд. уопште $A^{s+1} = A \cdot A^s$, гдје је s природан број. Математичком индукцијом (5.1.2.) је лако доказати сљедећи став.

Став 19.3.4. За квадратну матрицу A и ненегативне цијеле бројеве r и s важи:

1. $A^rA^s = A^{r+s}$,
2. $(A^r)^s = A^{rs}$.

Примјер 19.3.5. Наћи производ матричног бинома $P(A) = A - I$ и тринома $Q(A) = A^2 + A + I$.

Рјешење: $P(A)\cdot Q(A) = (A - I)\cdot(A^2 + A + I) = A^3 + A^2 + A - A^2 - A - I = A^3 - I.$♦

Дакле, правило за растављање на факторе разлике кубова важи и за матрице. Такође, овдје важе и сва остала одговарајућа правила за полиноме. Међутим, за матрице не важе сљедећа три правила, која важе за скаларе (бројеве):

1. $ab = ba$;
2. $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$;
3. $(ab = ac \wedge a \neq 0) \Rightarrow b = c$.

Примјер 19.3.5. Показати да производ двије матрице које нису нула матрице може бити нула матрица.

Рјешење: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Да 3. не важи за матрице, види се из сљедећег примјера. Ако је

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, тада је

$AB = AC = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix}$. Дакле, $AB = AC$ и $A \neq 0$ али ипак није $B = C$.

Што се тиче транспоновања матрица, важе сљедеће особине.

Став 19.3.6. Ако постоји производ AB датих матрица, постоји и производ транспонованих B^TA^T и важи једнакост $(AB)^T = B^TA^T$.

Доказ: Производ $(AB)_{m,p}$ постоји ако су матрице $A = (a_{jk})$ $B = (b_{jk})$ типа $m\times n$ и $n\times p$ респективно. Тада је $(AB)^T$ типа $p\times m$, B^T је типа $p\times n$, A^T је типа $n\times m$, и постоји производ B^TA^T који је типа $p\times m$. Према томе, матрице $(AB)^T$ и B^TA^T су истог типа.

Елеменат матрице $(AB)_{j,k}$, тј. збир $\sum_{i=1}^{n} a_{ji}b_{ik}$ налази се на мјесту (k, j) матрице $(AB)^T$.

На мјесту (k, j) матрице B^TA^T налази се елеменат $\sum_{i=1}^{n} b_{ik}a_{ji}$, тј. $\sum_{i=1}^{n} a_{ji}b_{ik}$.♦

Задаци 19.3.7.

1. Ако је $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ доказати да је $A^2 – (a + d)A + (ad – bc)I = 0$.

i. Полазећи од тога одредити све матрице другог реда које имају особину $A^2 = 0$.
ii. Доказати да је $A^k = 0$ ($k \in \mathbf{N}$) ако и само ако је $A^2 = 0$.

2. Доказати да је $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{pmatrix}$, гдје су f_n Фибоначијеви бројеви дефинисани рекурзивном једнакошћу $f_{-1} = 0$, $f_0 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

3. Ако је $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, доказати да је $AC = CB$. На основу тога одредити B^n, n цијели број.

[из $B = C^{-1}AC$ слиједи $B^2 = C^{-1}A^2C$, па индукцијом $B^n = C^{-1}A^nC$]

4. Дата је матрица $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Одредити све матрице $X=\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$, такве да је:

i. $AX = XA$. Да ли је тада $AX = XA = 0$, $(A + X)^2 = A^2 + X^2$?

ii. $AX = XA^T$. Да ли је тада $A^kX = X(A^T)^k$?

[(ii) ако је $b = c = 0$, $a = d$ тада је X произвољно; ако је $b \neq 0$ тада је $X=\begin{pmatrix} x & y \\ y & \frac{c}{b}x+\frac{d-a}{b}y \end{pmatrix}$; ако је $c \neq 0$ тада је $X=\begin{pmatrix} \frac{a-d}{c}y+\frac{b}{c}v & y \\ y & v \end{pmatrix}$; ако је $a \neq d$ тада је $X=\begin{pmatrix} x & \frac{c}{a-d}x-\frac{b}{a-d}v \\ \frac{c}{a-d}x-\frac{b}{a-d}v & v \end{pmatrix}$. Да, индукцијом.]

5. Ако је $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ доказати да је $A^n = A^{n-2} + A^2 + I$, $n \in \mathbf{N}$.

6. Ако је A квадратна матрица таква да је $I + A + A^2 + ... + A^k = 0$, доказати да је $A^{-1} = A^k$.

[множењем са A слиједи $A^{k+1} = I$, те тражена једн.]

7. Ако је A квадратна матрица и k природан број, доказати да из $A^k = 0$ слиједи

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + ... + A^{k-1}.$$

[Из $(A^k - I^k) = (A - I)(A^{k-1} + A^{k-2} + ... + A + I)$.]

VII Полиноми

Полиноми су алгебарски изрази са коначно много сабирака у којима се могу појављивати производи константи и варијабли. На примјер, $x^2 - 3xy + \frac{2}{5}y^2$ јесте полином, а $x^2 - 3xy + \frac{2}{5}y^{\frac{2}{3}}$ није.

Полиноми су изрази 1, $17x^3y$, $2\cdot5\cdot x - 3y$, $\frac{7}{13}xy + ay^2 - bxyz$, $x^4 - 2x^3y + 3x^2y^2 - 4xy^3$, ... Називани према броју сабирака, то су редом моном, бином, трином, слично као моноцикл, бицикл, трицикл, на сљедећој слици.

моноцикл	бицикл	трицикл

Постоје и називи квадрином (4 сабирка) квинтоном (5 сабирака), али се они рјетко користе.

Називани према сабирку са највећим збиром експонената на промјењивима, полиноме називамо нултог реда (константе), првог реда ($x - 2y + 3$), другог реда ($5x - 4xy + 3$), трећег реда ($x^2 + y^3$), итд.

Изрази $3xy^{-2}$, $\frac{1}{x+2}$, $\sqrt{x}$ + y, ..., гдје се у неком сабирку не појављује само константа, производ константи, или производи константи и промјењивих степенованих ненегативним експоненентом, нису полиноми.

Историја рјешавања нелинеарних алгебарских једначина почиње са историјом развоја математике, али теорија и примјена полинома са данашњим означавањем почиње тек у 15. вијеку.

У Кини се већ у 2. вијеку п.н.е. појавила књига „Седам поглавља математике“ (九章算術 тј. *Jiǔzhāng Suànshù*) гдје се појављују изрази попут „пет снопова доброг жита, четири снопа осредњег и сноп лошег жита продати су за 37 доуа“. Данас би писали $5x + 4y + z = 37$.

Француски математичар Николас (*Nicolas Chuquet*, 1445 – 1500?) је 1484. изумио итеративну методу за рјешавање полинома. Италијански математичар Феро (*Scipione del Ferro*, 1465-1526.) је 1515. рјешио кубну једначину, али није објавио

своје рјешење. Италијански математичари Тартаља (*Niccolo Fontana Tartaglia*, 1500?-1557.) и Кардано (*Girolamo Cardan*, 1501-1576.) су дали комплетно рјешење једначине трећег степена.

У 16. вијеку (*The Whetstone of Witte*, 1557.) велшки љекар и математичар Рекорд (*Robert Recorde*, око 1510 – 1558.) увео данашњи знак једнакости „=“ у математику. Знак сабирања „+“ и одузимања „ –„ долази нам из књиге Аритметика (*Arithmetica integra*, 1544.) од њемачког математичара Штифела (*Michael Stifel*, 1487 – 1567.). Рене Декарт (*La geometric*, 1637) је у полиномске једначине увео графичку методу, затим да би избјегао неспоразуме, прва слова алфабета (*a*, *b*, *c*, ...) за константе, посљедња (*x*, *y*, *z*, ...) за непознате, и горњи индекс за експоненте (нпр. x^2).

Даље се алгебра полинома убрзано развијала, углавном у областима којима се овдје нећемо бавити.

20. Алгебарске особине полинома

20.1. Једнакост полинома

Дефиниција 20.1.1. Полиномна функција, или краће полином је

$$f_a(x) = a_0 + a_1x + a_2x + ... + a_mx^m,$$

гдје је $a = (a_0, a_1, a_2, ..., a_m)$ низ од m бројева, m је природан број, а f_a је функција.

Прецизније, a је бесконачан низ комплексних бројева, који су сви једнаки нули почев од m+1-ог, и гдје барем један од бројева a_1 , a_2, ..., a_m није једнак нули. У општој теорији полиноми су врста вектора. За нас, промјенљива x и коефицијенти a_k (k = 0, 1, 2, ..., m) су реални бројеви.

Степен полинома је највећи експонент, степен промјенљиве x у полиному. Водећи (најстарији) коефицијент у полиному је онај уз промјенљиву са највећим степеном. Сабирци, функције a_kx^k називају се члановима полинома.

Теорема 20.1.2. Ако је $f_a(x) = 0$ за свако x, тада је $a_k = 0$ за свако k = 0, 1, 2, ..., m.

Доказ: Претпоставимо да тврђење није тачно, да је неко $a_k \neq 0$. Нека је n највећи (цијели) број за који је $a_n \neq 0$. Тада је $f_a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Бирајмо $|x| \geq 1$, па је $|x^{n-k}| \geq |x|$, за свако k = 0, 1, 2, ..., n-1. Отуда $\left|\frac{a_k}{x^{n-k}}\right| \leq \frac{|a_k|}{|x|}$, па због неједнакости троугла (Став 17.2.1.) имамо $\left|\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_2}{x^{n-2}} + ... + a_n\right| \leq \frac{1}{|x|}\left(|a_0| + |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|\right)$.

Ако бирамо довољно велико x да је такође $|x| > \frac{1}{|a_n|}\left(|a_0| + |a_1| + |a_2| + ... + |a_{n-1}|\right)$, лако налазимо $|a_n| > \left|\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + ... + \frac{a_{n-1}}{x}\right|$. Како је $f_a(x) = x^n\left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_2}{x^{n-2}} + ... + a_n\right)$,

те је $f_a(x) \neq 0$, што је у контрадикцији са претпоставком. Овим је теорема доказана.♦

Теорема 20.1.3. Ако је $f_a(x) = f_b(x)$ за свако x, тада су низови коефицијената ових полинома једнаки, тј. $a = b$.

Доказ: Нека је $c = a - b$, тј. $c_k = a_k - b_k$ за свако $k = 0, 1, 2, ..., m$. Тада је $f_c(x) = 0$ за свако x, што према претходној теореми (20.1.2.) значи да је c низ нула, односно $a = b$, тј. $a_k = b_k$ за свако k.♦

Другим рјечима, два полинома су једнака ако и само ако имају све коефицијенте једнаке.

Примјер 20.1.4. Представити полином $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ у облику полинома по x – 1.

Рјешење: Имамо редом $f(x) = b_0 + b_1(x-1) + b_2(x-1)^2 + b_3(x-1)^3 =$
$b_0 + b_1(x-1) + b_2(x^2 - 2x + 1) + b_3(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) =$
$b_3x^3 + (b_2 - 3b_3)x^2 + (b_1 - 2b_2 + 3b_3)x + (b_0 - b_1 + b_2 - b_3)$.
Изједначавање коефицијената са датим полиномом доводи до једначина
$b_3 = 1$, $b_2 - 3b_3 = -2$, $b_1 - 2b_2 + 3b_3 = 3$, $b_0 - b_1 + b_2 - b_3 = -4$,
чије рјешење је b3 = 1, $b_2 = 1$, $b_1 = 2$, $b_0 = -2$. Према томе,
$p(x) = -2 + 2(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3$.♦

Задаци 20.1.5.
1. Средити полином по опадајућим степенима:
а) $(x-1)^3 + (x-2)(x^2 + 3x + 4)$; **б)** $(x+1)^3 - (x+2)(x^2 - 2x - 3)$.

2. Одредити параметре тако да су полиноми $p(x)$ и $q(x)$ једнаки:
а) $p(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$ и $q(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$; **б)** $p(x) = -2x^3 + 3x^2 + 4x + 15$ и $q(x) = (x-3)(ax^2 + bx + c)$.

3. Представити полином $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ у облику полинома по:
а) x – 1; **б)** x + 1.

4. Користећи дефиницију дјељења полинома помоћу множења $r(x) = p(x) \cdot q(x)$, наћи количник $r(x)/q(x)$:
а) $(6x^2 + 13x - 5)/(3x - 1)$; **б)** $(10x^2 + 3x - 12)/(2x - 3)$.

5. Полазећи од дефиниције дјељења $p(x) = q(x) \cdot (x - c) + r$, гдје је $q(x)$ количник а r остатак дјељења, наћи количник и остатак:
а) $(2x^2 - 3x + 1)/(x - 2)$; **б)** $(3x^2 + 2x - 1)/(x + 2)$.
[а) $2x^2 - 3x + 1 - r = (ax + b)(x - 2)$ ..., $a = 2$, $b = 1$, $r = 3$; б) 3, -4, 7]

20.2. Еуклидов алгоритам дјељења

Еуклидов алгоритам за дјељење цијелих бројева (Теорем 5.2.3.) важи и за полиноме. При дјељењу полинома $p(x)$ и $q(x)$ добијамо **количник** $q_1(x)$ и **остатак** $r_1(x)$. Када је $r_1(x) = 0$ тада је $q(x)$ **највећи заједнички дјелилац** полинома $p(x)$ и $q(x)$. На примјер, $p(x) = x^2 - 4$, $q(x) = x - 2$ па је $q_1(x) = x + 2$ и $r_1(x) = 0$:

$$\begin{array}{l}(x^2-4):(x-2)=x+2\ .\\ \underline{x^2-2x}\ /\text{-}\\ \quad 2x-4\\ \quad \underline{2x-4}\ /\text{-}\\ \quad\quad 0\end{array}$$

Међутим, ако је $r_1(x) \neq 0$ поступак се наставља. Тада дјелимо $q(x)$ са $r_1(x)$ и добијамо количник $q_2(x)$ са остатком $r_2(x)$. На примјер, дјелећи $x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ и $x - 1$ добијамо $q_2(x) = x^2 - 4x + 1$ са остатком $r_2(x) = 2$:

$$\begin{array}{l}(x^3-5x^2+5x-3):(x-1)=x^2-4x+1.\\ \underline{x^3-x^2}\ /\text{-}\\ \quad -4x^2+5x-3\\ \quad \underline{-4x^2+4x}\ /\text{-}\\ \quad\quad\quad x-3\\ \quad\quad\quad \underline{x-1}\ /\text{-}\\ \quad\quad\quad\quad 2\end{array}$$

Продужимо ли овај поступак, у неком кораку $k = 1, 2, 3, \ldots$ наилазимо на остатак $r_k(x)$ који се садржи у претходном остатку $r_{k-1}(x)$. Заправо, добијамо низ идентитета:

$$\begin{array}{c}p(x) = q(x)q_1(x) + r_1(x),\\ q(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x),\\ r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x),\\ \ldots\\ r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)q_k(x) + r_k(x),\\ r_{k-1}(x) = r_k(x)q_{k+1}(x).\end{array}$$

Дефиниција 20.2.1. Ако су $p(x)$ и $q(x)$ два полинома и ако $r(x) \mid p(x)$ (чит. r дјели p) и $r(x) \mid q(x)$, кажемо да је $r(x)$ **заједнички дјелилац** полинома $p(x)$ и $q(x)$.

Дефиниција 20.2.1. Ако је 1 заједнички дјелилац полинома $p(x)$ и $q(x)$, ти су полиноми релативно прости.

Дефиниција 20.2.3. Полином $D(x)$ је **највећи заједнички дјелилац**, скраћено ***NZD***, полинома $p(x)$ и $q(x)$ ако је $D(x) \mid p(x)$ и $D(x) \mid q(x)$ и ако је сваки заједнички дјелилац $r(x)$ полинома $p(x)$ и $q(x)$ такође дјелилац и полинома $D(x)$.

Из Еуклидовог алгоритма непосредно слиједи сљедећи став.

Став 20.2.4. За било која два (не нулта) полинома $p(x)$ и $q(x)$ постоји *NZD*. Он је јединствен са тачношћу до једне мултипликативне константе.

Слично цијелим бројевима. Наиме, највећи заједнички дјелилац (*nzd*) два цијела броја је највећи цијели број који дијели оба броја без остатка. Употреба Еуклидовог алгоритма се заснива на чињеници да се највећи заједнички дјелилац два броја не мјења када се та два броја одузму.

На примјер, $nzd(299, 260) = 13$ јер је $299 = 13\cdot 23$ и $360 = 13\cdot 20$, а 23 и 20 су узајамно прости бројеви. Такође је $nzd(260, 39) = 13$, јер $299 - 260 = 39$. Са друге стране (Теорем 5.2.5.), тада постоје два цијела броја ($m = 7$ и $n = -8$) таква да је $13 = m\cdot 299 + n\cdot 360$.

Став 20.2.5. Ако је $D(x)$ највећи заједнички дјелилац (*NZD*) полинома $f(x)$ и $g(x)$ тада постоје полиноми $p(x)$ и $q(x)$ такви да је

$$D(x) = p(x)f(x) + q(x)g(x).$$

Доказ: Из Еуклидовог алгоритма имамо

$$r_1(x) = f(x) - q_1(x)g(x),$$
$$r_2(x) = -q_2(x)f(x) + (1 + q_1(x)q_2(x))g(x),$$
$$r_3(x) = (1 + q_2(x)q_3(x))f(x) - (q_1(x) + q_3(x) + q_1(x)q_2(x)q_3(x))g(x),$$
$$\dots$$
$$D(x) = r_k(x) = p(x)f(x) + q(x)g(x). \blacklozenge$$

Примјер 20.2.6. Помоћу Еуклидовог алгоритма наћи *nzd* (највећи заједнички дјелилац) цијелих бројева 2322 и 654.

Рјешење:

$2322 = 654\cdot 3 + 360$	$nzd(2322, 654) = nzd(654, 360)$
$654 = 360\cdot 1 + 294$	$nzd(654, 360) = nzd(360, 294)$
$360 = 294\cdot 1 + 66$	$nzd(360, 294) = nzd(294, 66)$
$294 = 66\cdot 4 + 30$	$nzd(294, 66) = nzd(66, 30)$
$66 = 30\cdot 2 + 6$	$nzd(66, 30) = nzd(30, 6)$
$30 = 6\cdot 5$	$nzd(30, 6) = 6$

Према томе, $nzd(2322, 654) = 6. \blacklozenge$

Примјер 20.2.7. Примјењујући Еуклидов алгоритам наћи *NZD* полинома

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3 \text{ и } g(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3.$$

Рјешење: Подјелимо $3f(x)$ са $g(x)$:

$$(3x^4 + 9x^3 - 3x^2 - 12x - 9):(3x^3 + 10x^2 + 2x - 3) = x - \frac{1}{3},$$
$$\underline{3x^4 + 10x^3 + 2x^2 - 3x\ /\text{-}}$$
$$-x^3 - 5x^2 - 9x - 9$$
$$\underline{-x^3 - \frac{10}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 1\ /\text{-}}$$

$$-\frac{5}{3}x^2-\frac{25}{3}x-10$$

добили смо $q_1(x)=x-\frac{1}{3}$ и $r_1(x)=-\frac{5}{3}x^2-\frac{25}{3}x-10=-\frac{5}{3}\left(x^2+5x+6\right)$. Како је *NZD* дат с тачношћу до једне мултипликативне константе, да би се поједноставио рачун у Еуклидовом алгоритму згодним бројем можемо помножити дјељеник или дјелилац. Дјелимо полином $g(x)$ са $q_1(x)$, тј.

$$(3x^3+10x^2+2x-3):(x^2+5x+6)=3x-5.$$

$$\underline{3x^3+15x^2+18x}\ /-$$

$$-5x-16x-3$$

$$\underline{-5x-25x-30}\ /-$$

$$9x+27$$

Затим дјелимо x^2+5x+6 са $9x+27$, односно са $x+3$. Добијамо $x+2$ без остатка. Према томе, $x+3$ је највећи заједнички дјелилац полинома $f(x)$ и $g(x)$.♦

Када је растављање на факторе датих полинома $f(x)$ и $g(x)$ лако, онда је лакши онај други начин за исти резултат, налажење њиховог *NZD* онако како смо то учили у основној школи. Нађемо све факторе полиноме $f(x)$ и $g(x)$ и једноставно одвојимо њихове заједничке факторе. Овдје, имаћемо $f(x)=(x^3-x-1)(x+3)$ и $g(x)=(3x^2+x-1)(x+3)$, па ако докажемо да количници x^3-x-1 и $3x^2+x-1$ немају даљњих фактора, или да немају заједничких фактора, онда је $x+3$ њихов највећи заједнички дјелилац (*NZD*).

Задаци 20.2.8.

1. Трансформисати израз у збир квадрата:

а) $5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2$; **б)** $4x^2+4y^2-6xy-4x+4y+4$;

в) $6x^2+6y^2+8xy-10x-10y+1$; **г)** $6x^2+6y^2-8xy+10x-10y+1$.

$[4(x+y)^2+(x-1)^2+(y+1)^2;\ 3(x-y)^2+(x-2)^2+(y+2)^2;$
$5(x+y-1)^2+(x-y)^2+1;\ 5(x-y+1)^2+(x+y)^2+1.]$

2. Формирањем разлике квадрата раставити на факторе полиноме:

а) x^4+3x^2+4; **б)** x^4+4y^4;

в) $x^4+x^2y^2+y^4$; **г)** x^8+x^4+1.

$[(x^2-x+2)(x^2+x+2);\ (x^2+2y^2-2xy)(x^2+2y^2+2xy);$
$(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy);\ (x^2+1-x)(x^2+1+x)(x^4+1-x^2).]$

3. Раставити на факторе изразе:

а) $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$; **б)** $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$;

в) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$; **г)** $(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz$.[13]

$[3(x+y)(y+z)(z+x);\ (y-z)(x-y)(x-z)]$

4. Наћи *NZD* растављањем на факторе полинома:

а) x^3-7x+6 и x^3+2x^2-5x-6; **б)** x^3-6x^2-x+30 и $x^3-19x-30$;

в) $x^3+10x^2+31x+30$ **г)** $x^3+13x^2+47x+35$

[13] Међуопштинско такмичење из математике, за 1. разред гимназија у Србији, 15. март 1980.

и $2x^3 + 9x^2 - 7x - 6$; и $3x^3 + 23x^2 + 19x - 7$.

5. Помоћу Еуклидовог алгоритма наћи *nzd* бројева:
а) 2322 и 654; **б)** 3997 и 763; **в)** 1735 и 635.

6. Наћи количник и остатак помоћу Еуклидовог алгоритма:
а) $(3x^3 - 4x + 5):(x + 2)$; **б)** $(4x^3 + x^2 - 1):(x - 2)$;
в) $(2x^4 + 3x^3 - 4x + 5):(x^2 + x + 1)$; **г)** $(3x^4 - 2x^2 + 4x - 5):(x^2 - x + 1)$.

7. Наћи *NZD* датих полинома помоћу Еуклидовог алгоритма:
а) $2x^3 - x^2 - 2x + 1$ и $2x^2 + 3x + 1$; **б)** $2x^3 - x^2 - 2x + 1$ и $2x^2 - x - 1$;
в) $x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 2$ и $x^3 - x^2 - x - 2$; **г)** $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 2$ и $x^3 + x^2 - x + 2$.

8. Користећи Еуклидов алгоритам наћи *NZD* и скратити разломак:
а) $\dfrac{3x^3 + 10x^2 + 2x - 3}{x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3}$; **б)** $\dfrac{3x^3 - 10x^2 + 4x - 3}{x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x - 3}$;
в) $\dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}$; **г)** $\dfrac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}$.

20.3. Безуов став

Већ смо видјели да за полиноме важи сљедеће тврђење о дјељењу, нама у сличном облику познато код цијелих бројева (Теорем 5.2.3.).

Став 20.3.1. За свака два ненулта полинома $f(x)$ и $g(x)$ постоје јединствени полиноми $q(x)$ и $r(x)$ такви да је $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, при чему је степен $r(x)$ мањи од степена $g(x)$.

Доказ: Нека је $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x + ... + a_mx^m$, $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x + ... + b_nx^n$ и $mn \neq 0$. Фиксирамо n и доказујемо индукцијом (&5.1.) по m. За $m < n$ тврђење је тривијално ($q \equiv 0$, $r \equiv f$). Даље, претпоставимо да тврђење важи за све степене полинома $f(x)$ мање од неког $m_0 \geq n$. Када $m = m_0$, тада је полином $f_1(x) = f(x) - \dfrac{a_m}{b_n} x^{m-n} g(x)$ степена мањег од m, јер му је коефицијент уз x^m нула. По претпоставци индукције постоје полиноми $q_1(x)$ и $r(x)$ такви да је $f_1(x) = g(x)q_1(x) + r(x)$. Међутим, тада је $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, гдје је $q(x) = \dfrac{a_m}{b_n} x^{m-n} + q_1(x)$. ♦

У овом изразу, $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, полиноме $q(x)$ и $r(x)$ зовемо количник и остатак дјељења и кажемо да је полином $f(x)$ дјељив полиномом $g(x)$ ако је остатак нула полином.

На примјер, полином $f(x) = x^3 + 1$ подијељен полиномом $g(x) = x^2 – x + 1$ даје количник $q(x) = x + 1$ без остатка, тј. $r(x) = 0$, па кажемо да је први (f) дјељив другим (g).

Став 20.3.2. (Безуов став) Полином $f(x)$ подијељен полиномом $x - \alpha$ даје остатак $f(\alpha)$.

Доказ: Из претходне теореме (20.3.1.) слиједи $f(x) = (x - \alpha)q(x) + c$, гдје је остатак $c \in \mathbf{R}$ константа. Ако узмемо $x = \alpha$ добијамо $f(\alpha) = c$.♦

Примјер 20.3.3. Одредити параметар k тако да је остатак дјељења полинома $f(x) = x^3 + kx^2 – 7x + 6$ са полиномом $g(x) = x – 2$ буде 3.

Рјешење: Према Безуовом ставу, полином $f(x)$ подијељен полиномом $x – 2$ даће остатак $f(2)$. Једначина $f(2) = 3$ даје $8 + 4k – 14 + 6 = 3$, те $k = ¾$.♦

Нула полинома $f(x)$ је број a такав да је $f(a) = 0$. Ако је a нула полинома $f(x)$ онда је тај полином дјељив са $(x – a)$. То је посљедица Безуовог става. Обратно, погађајући бројеве a такаве да је $f(a) = 0$ можемо раставити дати полином на факторе.

Примјер 20.3.4. Помоћу Безуовог става раставити на факторе $x^3 – 7x + 6$.

Рјешење: Полином $f(x) = x^3 – 7x + 6$ има вриједност нула за $x \in \{1, 2, -3\}$, тј. $f(1) = 0$, $f(2) = 0$ и $f(-3) = 0$. Према Безуовом ставу, то значи да је полином $f(x)$ дјељив са сваким од полинома $x – 1$, $x – 2$ и $x + 3$. Како је $f(x)$ трећег степена, то су му и једини фактори, тј. $f(x) = x^3 – 7x + 6 = (x – 1)(x – 2)(x + 3)$.♦

Када знамо неке од фактора тада можемо и дјељењем полинома (Еуклидов алгоритам) прећи на количник, полином нижег степена који је лакши за даљи рад.

За полиноме са цјелобројним коефицијентима има једно тврђење које нам веома користи при погађању нула, и растављању на факторе. Ако су сви ($j = 0, 1, 2, ..., m$) коефицијенти a_j из дефиниције 20.1.1. цијели бројеви, тада $f_a\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = 0$, за $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ слиједи $\alpha | a_0$ $\beta | a_m$. Према томе, у претходном примјеру (20.3.4.) је требало само погађати бројеве ±1, ±2 и ±3.

Очигледна посљедица Безуовог става је сљедеће тврђење.

Став 20.3.5. Ако је полином $f(x)$ дјељив полиномом $g(x)$, онда је свака нула полинома $g(x)$ уједно и нула полинома $f(x)$.

Инспирисани начином на који је из претходног (20.3.1.) изведен Безуов став (20.3.2.) налазимо остатке дјељења са полиномом другог реда.

Примјер 20.3.6. Наћи остатак дјељења полинома $f(x) = 1 + x^3 + x^{10} + x^{101}$ полиномом $g(x) = x^2 - 1$.

Рјешење: Из првог става (20.3.1.) имамо $f(x) = (x^2 - 1)q(x) + r(x)$, гдје је остатак $r(x) = ax + b$ најопштији полином степена < 2. Отуда, за $x = \pm 1$ добијамо једначине $f(+1) = ((+1)^2 - 1)\cdot 0 + a\cdot(+1) + b$ и $f(-1) = ((-1)^2 - 1)\cdot 0 + a\cdot(-1) + b$, односно $4 = a + b$, $0 = -a + b$, тј. $a = b = 2$. Према томе, тражени остатак је $r(x) = 2x + 2$. ♦

Мање очигледна је сљедећа посљедица, коју само наводимо без доказа јер нуле полинома, као и коефицијенти полинома могу бити и тзв. комплексни бројеви које овдје не обрађујемо.

Став 20.3.7. Полином $f(x)$ степена $m \in \mathbf{N}$ може се јединствено представити у облику

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_m),$$

гдје се не рачуна редосљед фактора и гдје је $a \neq 0$, а нуле полинома $x_1, x_2, ..., x_m$ су реални или комплескни бројеви, не обавезно различити.

Дакле, полином степена m има највише m нула $x_1, x_2, ..., x_m$, које се могу понављати и то је једна од најважнијих теорема алгебре полинома.

Задаци 20.3.8.

1. Одредити остатак дјељења полинома:

а) $x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ и $x - 2$; **б)** $x^3 + 2x^2 - 3x - 4$ и $x + 2$;
в) $x^2 - 3x + 4$ и $2x + 3$; **г)** $x^2 + 2x - 3$ и $3x - 2$.

2. Користећи Безуов став раставити на факторе полиноме:

а) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$; **б)** $x^3 + x^2 - 17x + 15$;
в) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$; **г)** $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$;
д) $2x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 5x - 6$; **ђ)** $2x^4 + 3x^3 - 10x^2 - 5x - 6$.

3.[14] Наћи параметар a тако да полином $f(x) = x^4 + ax^3 + 3x^2 - 3x + 2$ буде дјељив полиномом $g(x) = x - 1$.

4. Ако дјељењем полинома $x^8 + 3x^3 + ax + b$ полиномом $x^2 - 1$ добијамо остатак x, колико је $a^2 - b^2$?

5. Ако дјељењем полинома $x^3 + ax^2 + x + b$ полиномом $x^2 + x - 2$ добијемо остатак $3x + 2$, наћи параметре a и b.

6. Ако је остатак при дјељењу полинома $x^3 + 2x^2 + ax + b$ полиномом $x^2 - x - 2$ једнак $7x + 7$, колико је $3a + 3b$?

[14] Задаци од 3. до 10. су са пријемних испита из математике 2001–09. на Београдском универзитету.

7. Наћи остатак дјељења полинома $x^{2008} + x^{1007} + 1$ полиномом $x^2 + 1$.

8. Наћи остатак дјељења полинома $x^{2004} - x^{2000} + x$ полиномом $x^2 - 1$.

9. Остатак при дјељењу полинома $f(x)$ степена бар 2 са $x - 1$ је 1, а остатак при дјељењу истог полинома са $x + 1$ је -1. Наћи остатак дјељења $f(x)$ са $x^2 - 1$.

10. Ако је полином $x^5 - 3x^4 + ax^3 + x^2 + b$ дјељив полиномом $(x - 2)^2$, наћи $a^2 - b^2$.

21. Неке примјене полинома

21.1. Непосредни проблеми

Примјер 21.1.1. Производ три узастопна броја је 210. Који су то бројеви?

Рјешење су бројеви 5, 6 и 7. То можемо добити нагађањем по низу цијелих бројева ..., -3, -2, -1, ..., 4, 5, 6, 7, 8, ... чији производ брзо расте.

Други начин је анализа фактора датог броја $210 = 2\cdot3\cdot5\cdot7 = 5\cdot6\cdot7$.

Трећи начин је формирање неке полиномске једначине. Рецимо $(x - 1)x(x + 1) = 210$, тј. $x^3 - x = 210$. Тада, ако смо добри у растављању на факторе налазимо $(x^3 - 216) - (x - 6) = 0$, па $(x - 6)(x^2 + 6x + 36) - (x - 6) = 0$, односно $(x - 6)(x^2 + 6x + 35) = 0$. Производ је нула само онда када је неки од фактора нула, што значи да имамо двије могућности: $x - 6 = 0$, или $x^2 + 6x + 35 = 0$. Прво рјешење је средњи број $x = 6$, а то је опет исти резултат: 5, 6 и 7. Што се тиче евентуалног другог рјешења, једначину $x^2 + 6x + 35 = 0$ напишимо у облику збира позитивних бројева $(x + 3)^2 + 26 = 0$ да би видјели да не постоји такво x.♦

21.1.2. Станице коцке су дате изразом $x + 2$. Запремина коцке је 729 m^3. Наћи x.

Рјешење: Страница коцке $a = x + 2$. Запремина коцке, иначе $V = a^3$, па имамо $729 = (x + 2)^3$, односно $x + 2 = 9$, те $x = 7$ m.♦

21.1.3. Правоугаоно двориште има ширину x и дужину $x + 5$ метара. Површина дворишта је 66 m^2. Израчунати димензије дворишта.

Рјешење: Ширина = x, дужина = $x + 5$, површина = 66. Отуда $x(x + 5) = 66$, односно $x^2 + 5x - 66 = 0$. Растављамо на факторе трином, имамо $x^2 + 11x - 6x - 66 = 0$, затим $x(x + 11) - 6(x + 11) = 0$, па $(x + 11)(x - 6) = 0$. Када је први фактор нула имали бисмо прво рјешење: ширина $x = -11$, дужина = -6, али је оно неприхватљиво због геометријске природе података. Када је други фактор нула, имамо прихватљиво рјешење: ширина $x = 6$ m, дужина = 11 m.♦

Задаци 21.1.4.
1. Наћи два узастопна цијела броја чији производ је:
а) 156; **б)** 210.

Наћи сва рјешења.

2. Замислите број. Одузмите 7. Помножите резултат са 3. Додајте 30. Све то подјелите са 3. Одузмите замишљени број. Колико сте добили? Употребите полиноме да објасните овај резултат.

3. Процјењено је да ће број становника у неком насељу за t година бити
а) $S = t^2 - 15t + 5036$; **б)** $S = t^2 - 16t + 5060$.
Колико је становника сада? Када ће број становника бити 5000?

4. Дужина правоугаоника је m метара већа од двостурке ширине. Површина је p квадратних метара. Наћи димензије, дужину и ширину правоугаоника, ако су дати бројеви:
а) $m = 4$, $p = 30$; **б)** $m = 3$, $p = 14$.

[3, 10; 2, 7 m]

5. Површина троугла је 24 квадратна центиметра. Основа је 2 cm дужа од висине. Наћи основу и висину.

6. Правоугаона дрвена ограда је изграђена на постојећем равном зиду од цигле. Са додатих 24 m ограде је ограђен простор површине 70 m^2. Израчунати димензију ограде.

[14·5, или 10·7 m^2]

21.2. Рационални изрази

Рационални изрази су разломци чији су бројник и називник полиноми.

Примјер 21.2.1. Када се исти број дода бројнику и називнику разломка $\frac{3}{5}$, резултат је $\frac{7}{9}$. Који је то број?

Рјешење: Нека је x додати број. Имамо $\frac{3+x}{5+x} = \frac{7}{9}$. Отуда $x = 4$. ♦

Примјер 21.2.2. Дамир уради неки посао за 3 дана, а Ирена тај исти посао уради за 8 дана. Колико им треба да заједноураде тај посао?

Рјешење: Брзина Дамира је 1/3, а брзина Ирене 1/8. Заједничко вријеме x. Једначина је $x/3 + x/8 = 1$, чије је рјешење 24/11 дана, што је мало више од 2 дана. ♦

Примјер 21.2.3. Славку треба 6 часова више да окречи собу него Јанку. Радећи заједно, они могу окречити собу за 4 часа. Колико времена за кречење треба сваком од њих појединачно ако раде сами?

Рјешење: Вријеме Славка је 6 + *x*, Јанка *x*, а заједно 4 часа. Једначина је $\frac{4}{6+x}+\frac{4}{x}=1$, чија су рјешења: Славко 12 часова, Јанко 6 часова.♦

Задаци 21.2.4.

1. Исти број је додат бројнику и називнику разломка $\frac{4}{9}$, резултат је $\frac{2}{3}$. Који је то број?

[6]

2. Двије трећине броја додато реципрочној вриједности броја вриједи $\frac{25}{6}$. Који је то број?

[$\frac{1}{4}$ и 6]

3. Када се напуни хладном водом за 10 минута, а ако је отворена само топла вода за 12 минута. Колико времена је потребно за пуњење каде ако су отворене обе славине?

[5,5 min]

4. Када ради сам, Ранко ошиша травњак за 3 часа брже него Коста. Када раде заједно, треба им 2 часа. Колико времена треба сваком појединачно?

[3 и 6 часова]

5. Славина А и славина Б заједно напуне базен за 2 часа. Ако користимо само славину А, базен се напуни за 3 часа. Колико времена треба самој славини Б да напуни базен?

[6 часова]

21.3. Примјери графова

Полиномска функција $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x + ... + a_mx^m$ се назива и крива *m*-тог реда због облика њеног графа у Декартовом правоуглом систему координата, који битно зависи од броја $m = 0, 1, 2, 3, 4, ...$. Зависно од ненегативног цијелог броја *m* ту функцију називамо крива нултог, првог, другог, трећег, четвртог, итд. реда.

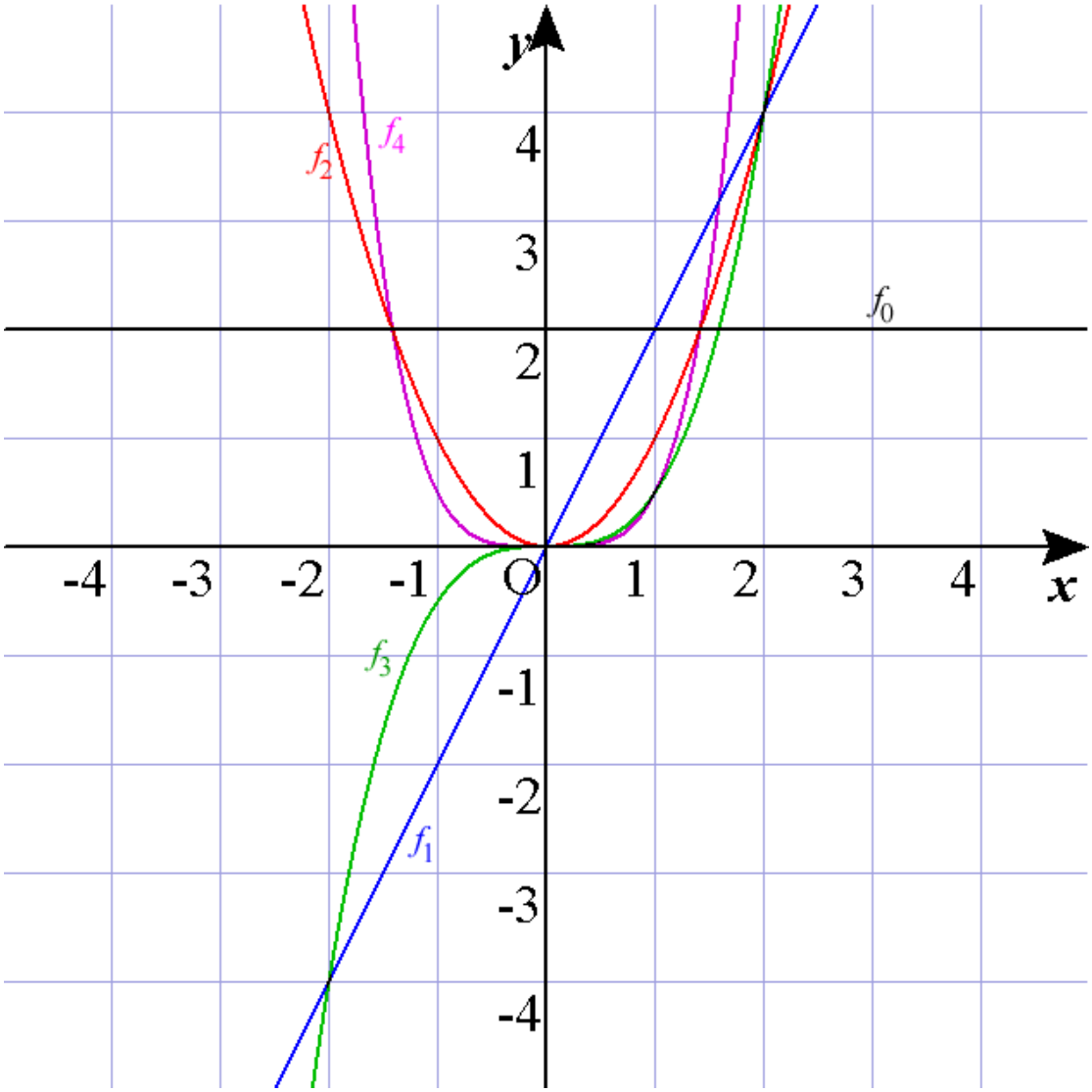
Примјер 12.3.1. Нацртати графове функција $f_0(x) = 2$, $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x)=\frac{1}{2}x^3$ и $f_4(x)=\frac{1}{2}x^4$.

Рјешење: Израчунавамо вриједности свих пет функција у што је више тачака.

x	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
f_0	2	2	2	2	2
f_1	-4	-2	0	2	4

f_2	4	1	0	1	4
f_3	-4	-0,5	0	0,5	4
f_4	8	0,5	0	0,5	8

Затим цртамо графове различитим бојама у истом координатном систему:

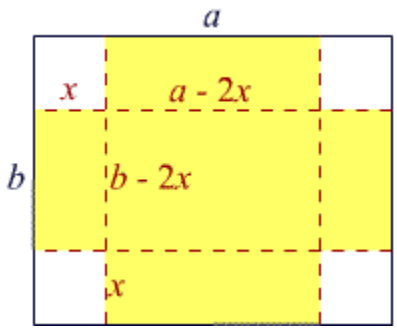


Функција f_0 је (црна) права линија паралелне x-оси на висини 2. Функција f_1 је такође права (плава) која пролази кроз тачке (0, 0) и (1, 2). Функција f_2 је (црвена) парабола која има најнижу вриједност у тјемену (0, 0), а лијево и десно од y-осе симетрично има све већу висину. Кубна (зелена) и 4. степена (љубичаста) функција имају све више кривина и брже се удаљавају од x-осе. ♦

Примјер 12.3.2. Од лима димензија $a \times b$ треба изрезати посуду облика квадра, отворену конзерву дубине x. Посебно, узети да је a = 50 cm, b = 40 cm.
i. Колика је запремина посуде?

ii. Јесу ли и како ограничене вриједности дубине x?
iii. Када је запремина посуде највећа?

Рјешење: На сљедећој слици лијево види се мрежа резања лима.

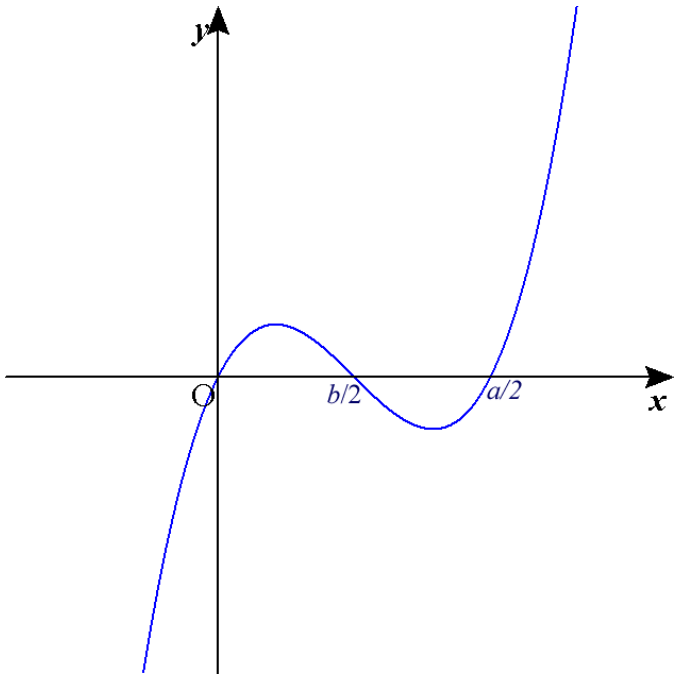


(i.) Запремина добијене посуде је

$$V = (a - 2x)(b - 2x)x = 4x(25 - x)(20 - x) \text{ cm}^2.$$

(ii.) Дубина x је мања од половине мањег од бројева a, b. Посебно, $0 < x < 20$ cm.

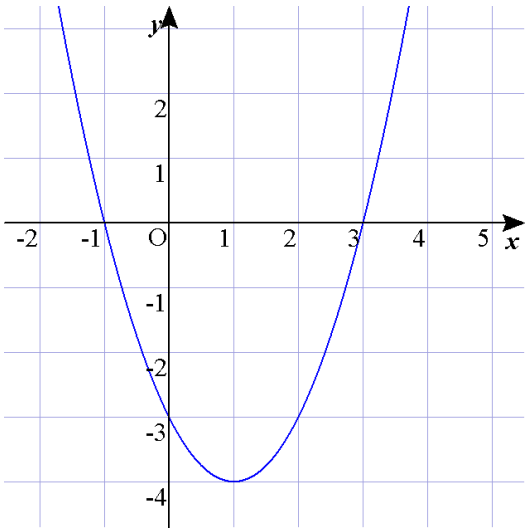
(iii.) Функција V је полином трећег степена по x. То је непрекидан скуп тачака у координатном систему, крива која пролази тачкама 0, $b/2$ и $a/2$ осе x. За негативне вриједности x ова функција понире, а за позитивне расте без ограничења, као на сљедећој слици десно, гдје смо узели да је $a < b$.



Посебно, тачке пресјека ове кубне функције и x-осе су 0, 20 и 25 (у центиметрима). Између прве двије тачке, мало лијево од средине ($x \approx 7{,}4$ cm) налази се оптимална вриједност дубине за коју ће тражена конзерва имати највећу могућу запремину обзиром на дати материјал. ♦

Најопштија полиномска функција m-тог степена ($m = 0, 1, 2, ...$) у координатном систему је крива (укључујући и праве линије) одређена са m+1-ом тачком.

Примјер 12.3.3. Наћи полиномску функцију дату графом.



Рјешење: Видимо да граф пролази кроз 3 тачке (-1, 0), (0, -3), (3, 0). Тражимо најопштију полиномску функцију 2. степена

$$y = ax^2 + bx + c,$$

која садржи ове координате. То нас доводи до сљедећих линеарних једначина:

$$a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c = 0,$$
$$a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = -3,$$
$$a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c = 0.$$

Рјешење система је $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$. Тражена функција је парабола

$$y = x2 - 2x - 3.\blacklozenge$$

Задаци 12.3.4.

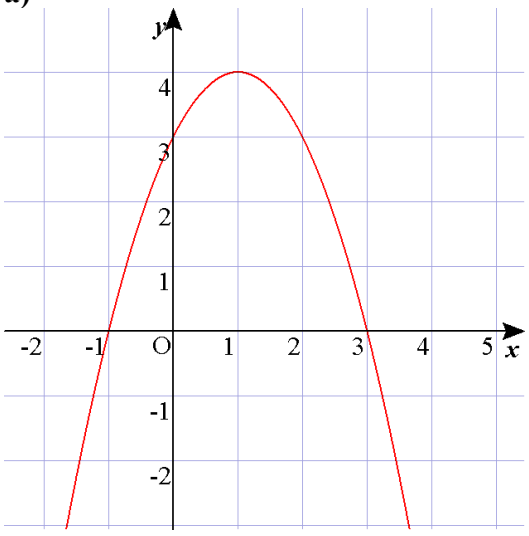
1. Нацртати праве $y = -1$, $y = 3$ и $y = x + 1$. Наћи тачке њихових међусобних пресјека.

2. Наћи полином 1. степена (праву) чији граф садржи тачке (-1, -3) и (2, 3). Нацртати граф.

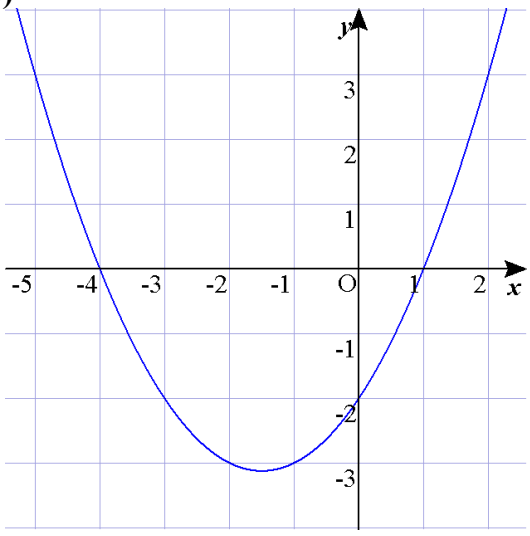
3. Наћи полином 2. степена (параболу) чији граф садржи тачке (-1, 3), (1, 1), (3, 7) и нацртати граф.

4. Наћи функцију дату графом:

а)

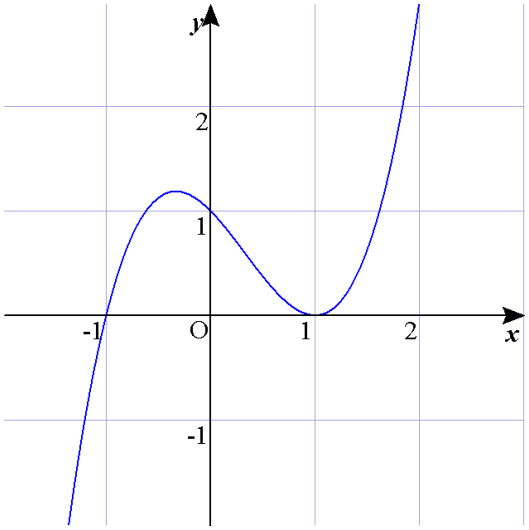


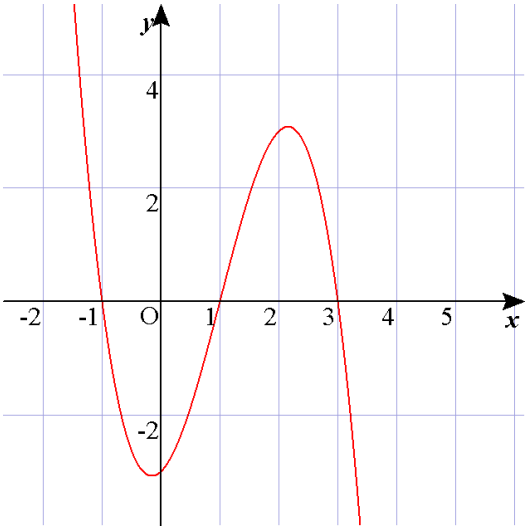
б)



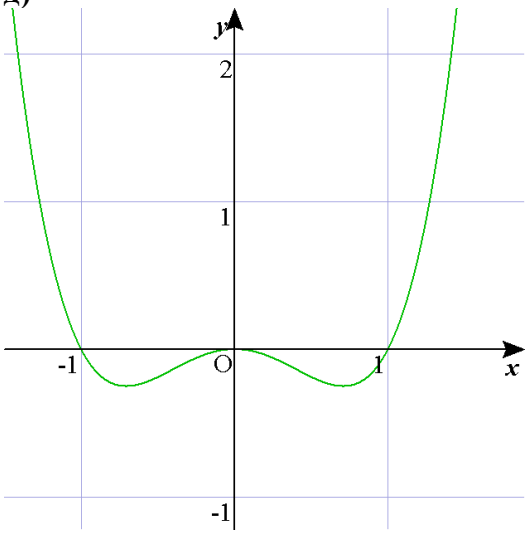
в)

г)

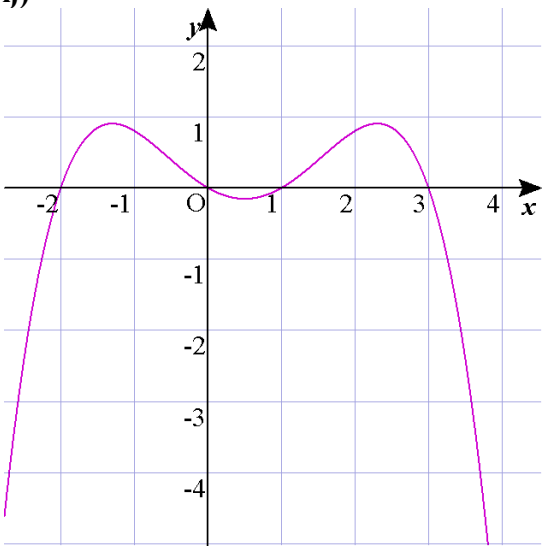




д)

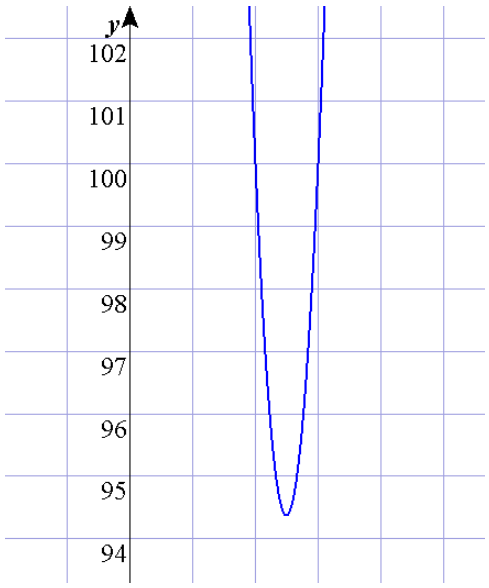


ђ)

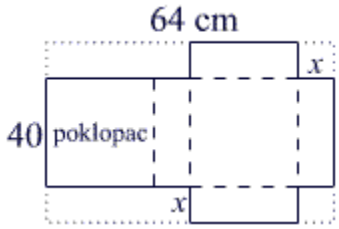


5. Почев од 1. јануара током године након t мјесеци, запремина воде у неком резервоару износи $V(t) = -t^3 + 30t^2 - 131t + 250$ мегалитара. Управа резервоара је одредила да за ниво воде испод 100 ML иригација (наводњавање) није дозвољена. Ако је и током којих мјесеци иригација била забрањена те године? Нацртајте потребан граф.

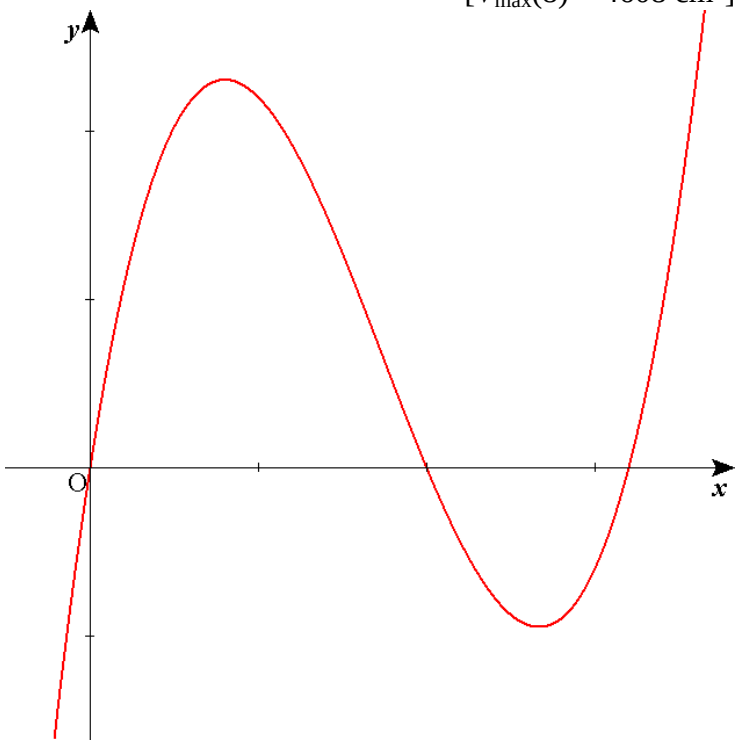
[март, дио функције је на слици десно]



6. Затворена кутија за доставу пице се прави од правоугаоног картона димензија 64 са 40 центиметара. Изрезујемо једнаке квдрате странице x cm из два угла краће стране, и два једнака правоугаоника ширине x cm из супротна два угла. Затим пресавијамо дуж испрекиданих линија на сљедећем дијаграму лијево. Наћи запремину кутије у функцији од x и процјенити максимум.



$[V_{max}(8) = 4608\ \text{cm}^3]$



VIII Тригонометрија

Тригонометрија (лат. *trigōnon* – троугао, *metron* - мјерење) је област математике која проучава релације између углова и страница троуглова.

Први историјски трагови тригонометрије су нађени у старим записима из Египта и Месопотамије, у Вавилонској каменој плочи (око 1900-1600. п.н.е.) и у египатском папирусу Ринду (око 1650. п.н.е.), у вези са мјерењима пирамида. Затим су грци Хипократ из Киоса, Еуклид и Архимед проучавали односе између централних углова кружнице и тетива (Елементи, око 430. п.н.е.). Грци су направили и прву претечу данашњих таблица синуса (Хипархус, 140. п.н.е.) и открили су сферну тригонометрију (Менелај из Александрије, око 100. н.е).

Тригонометрију су даље развијали Хинду математичари, проучавајући тетиве круга са датим полупречником (Сидхантасу, IV и V вијек). Тригонометрија Хинду математичара нама долази од арапских математичара. Преводи са арапског на латински језик током XII века увели су тригонометрију у Европу.

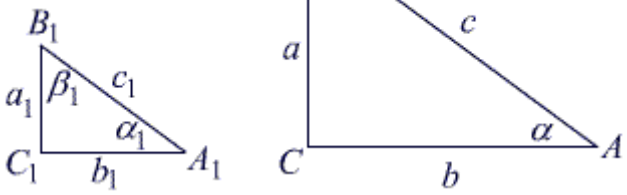
Од доба Хипарха до Региомонтануса (*De triangulis omni modis*, 1464.) тригонометрија је алат за астрономска израчунавања. Затим је тригонометрија постала засебан субјект. Никола Коперник (*De revolutionibus orbium coelestium*, 1543.) и његов ученик Ретикус (*Opus palatinum de trianulis*, 1596.) установили су употребу шест основних тригонометријских функција, правећи таблице њихових вредности, држећи се идеје да те функције представљају односе страница у правоуглом троуглу, раније него традиционалне полу-тетиве кругова.

22. Правоугли троугао

Сви правоугли троуглови који имају по један оштар угао једнак међусобно су слични. То значи да су односи одговарајућих страница тих троуглова једнаки, а неки од таквих односа су тригонометријске вриједности датог угла.

22.1. Дефиниције тригонометријских функција

Фигуре на сљедећим сликама десно су два правоугла троугла $A_1B_1C_1$ и ABC ($\angle C_1 = \angle C = 90°$), којима су оштри углови у тјеменима A једнаки ($\alpha_1 = \alpha$).



Зато што је збир углова у (сваком) троуглу 180°, зато су им и оштри углови у тјеменима B једнаки ($\beta_1 = \beta$). Оштри углови у правоуглом троуглу се називају **комплементни**, или комплементарни, јер се допуњавају до правог угла, до 90°.

Одговарајуће странице сличних троуглова, тј. странице троуглова наспрам једнаких углова не морају бити једнаке, али су једнаки њихови односи. Однос катете наспрамне углу и хипотенузе назива се **синус** тога угла. Однос катете која гради дати угао и хипотенузе назива се **косинус** угла. **Тангенс** је однос наспрамне и налегле катете, а **котангенс** је однос реципрочан тангенсу. Рјеђе спомињемо **секанс**, реципрочну вриједност косинуса, или **косеканс** који је реципрочна вриједност синуса.

На претходној слици имамо

Дефиниција 22.1.1 $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$,

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},\ \operatorname{csc}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}\ .$$

Такође, видимо да је $\sin\beta = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}$.

Примјетимо да је збир квадрата синуса и косинуса истог угла једнак јединици, затим да је тангенс једнак количнику синуса и косинуса истог угла, и да су тангенс и котангенс истог угла реципрочни. Сљедећа три идентитета су посљедице Питагорине теореме.

Став 22.1.2. i. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; **ii.** $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$; **iii.** $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{csc}^2\alpha$.

Доказ: а) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} =$ Питагорина теорема $=$

$\frac{c^2}{c^2} = 1$.♦

Став 22.1.3. i. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; **ii.** $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Доказ: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.♦

Став 22.1.4. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

Доказ: $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = 1$.♦

То су тзв. **основни тригонометријски идентитети**. Лако налазимо даље, да су синус и косинус комплементних углова једнаки, као и тангенс и котангенс.

Став 22.1.5. $\alpha+\beta=90° \Rightarrow \sin\alpha=\cos\beta \ \wedge \ \text{tg}\,\alpha=\text{ctg}\,\beta$.

Дефиниције тригонометријских функција се редовно завршавају формулама за израчунавање синуса и косинуса када је познат тангенс угла.

Став 22.1.6. $\sin\alpha=\dfrac{\pm t}{\sqrt{1+t^2}}$ и $\cos\alpha=\dfrac{\pm 1}{\sqrt{1+t^2}}$, где је $t=\text{tg}\,\alpha$.

Доказ: Из $t=\text{tg}\,\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ квадрирањем слиједи $t^2\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$, затим $t^2(1-\sin^2\alpha)=\sin^2\alpha$. Једноставним алгебарским трансформацијама добијамо прво $(1+t^2)\sin^2\alpha=t^2$, а затим прву тражену једнакост. Ако поновимо исти почетак и након $t^2\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$ замјенимо синус (став 22.1.2.) имамо $(1+t^2)\cos^2\alpha=1$ па тражену другу једнакост. ♦

Задаци 22.1.7.

1. Нађи тригонометријске функције троугла чије су странице:

а) 3, 4, 5; **б)** 5, 12, 13; **в)** 7, 24, 25;
г) 2,0; 2,1; 29; **д)** 1,2; 3,5; 3,7; **ђ)** 2,8; 4,5; 5,3.

2. Нађи остале тригонометријске функције ако је дато:

а) $\sin\alpha=0{,}6$; **б)** $\cos\alpha=0{,}96$; **в)** $\text{tg}\,\alpha=2{,}4$;
г) $\sin\alpha=\dfrac{2a}{a^2+1}$; **д)** $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$; **ђ)** $\text{ctg}\,\alpha=\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$.

3. Поједноставити разломке:

а) $\dfrac{1-(\sin x-\cos x)^2}{\cos^2 x}$; **б)** $\dfrac{1+\text{tg}^2\alpha}{1+\text{ctg}^2\alpha}$; **в)** $\dfrac{\csc^2\beta-\sin^2\beta}{\text{tg}^2\beta}$;

[2tg$x$; tg$^2\alpha$; ctg$^4\beta$]

4. Доказати да је:

а) $\sin^2 15° + \cos^2 25° + \cos^2 65° + \sin^2 75° = 2$;
б) $\text{tg}\,1°\cdot\text{tg}\,2°\cdot\text{tg}\,3°\cdot\ldots\cdot\text{tg}\,89°=\text{ctg}\,45°$.

5. Доказати основне идентитете:

а) $\text{tg}\,\alpha+\text{ctg}\,\alpha=\sec\alpha\cdot\csc\alpha$; **б)** $\text{ctg}^2\beta=\cos^2\beta+(\text{ctg}\,\beta\cdot\cos\beta)^2$;
в) $\text{ctg}\,\gamma\cdot\sec\gamma=\csc\gamma$; **г)** $\sec^2\delta+\csc^2\delta=\dfrac{1}{\sin^2\delta\cdot\cos^2\delta}$.

6. Доказати тригонометријске идентитете:

а) $\text{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\text{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$; **б)** $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

в) $\dfrac{\sin^3 x-\cos^3 x}{1+\sin x\cos x}=\sin x-\cos x$;

г) $\dfrac{1}{\sin^2 x-\cos^2 x}=\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2 x}{1-\operatorname{ctg}^2 x}$.

7. Наћи tg x ако је:

а) $\dfrac{\sin x+2\cos x}{-3\sin x+4\cos x}=5$;

б) $\dfrac{-3\sin x+2\cos x}{5\sin x-\cos x}=4$.

8. Наћи sin x, cos x, tg x и ctg x ако је:

а) 3 sin x + 4 cos x = 5;

б) 5 sin x + 12 cos x = 13.

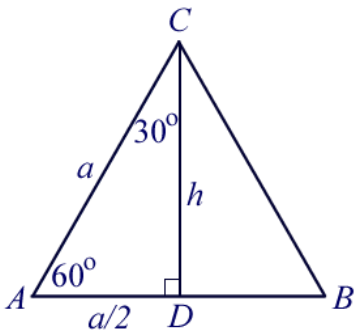
22.2. Вриједности за основне углове

Основни углови у тригонометрији правоуглог троугла у степенима су 30°, 45° и 60°, јер их налазимо код једнакостраничног троугла и квадрата.

Став 22.2.1. Таблица основних вриједности тригонометријских функција је:

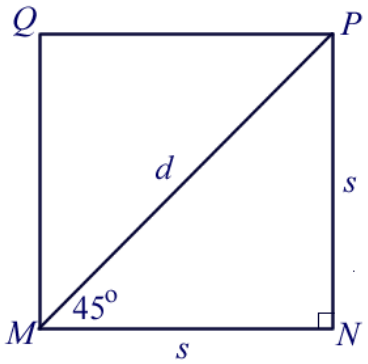
α	sin α	cos α	tg α
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Доказ: На првој сљедећој слици лијево имамо једнакостраничкни троугоа ABC странице дужине $AC = a$ и висине $CD = h$. У правоуглом троуглу ACD, Питагорина теорема даје $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$, па је висина једнакостраничног троугла $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Отуда $\sin 30° = \dfrac{a/2}{a} = \dfrac{1}{2}$, $\cos 30° = \dfrac{h}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{a/2}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. У истом правоуглом троуглу ACD налазимо

$\sin 60° = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$ и $\operatorname{tg} 60° = \frac{h}{a/2} = \sqrt{3}$. Даље, имамо квадрат $MNPQ$ странице s и дијагонале d, на сљедећој слици десно. Троугао MNP је једнакокраки правоугли са страницом $d = MP = \sqrt{s^2 + s^2} = s\sqrt{2}$.



Отуда $\sin 45° = \frac{s}{d} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45° = \frac{s}{d} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\operatorname{tg} 45° = \frac{s}{s} = 1$.♦

Синус и косинус не могу бити већи од 1, па у тригонометрији углавном радимо са децималним бројевима (до 5 децимала) и са тригонометријским таблицама или калкулатором. Међутим, синус и тангенс угла мањег од 0,001° на пет децимала постаје 0 и исто тако косинус и котангенс за угао близу 90°. Отуда потреба за овим „екстремним“ вриједностима.

Став 22.2.2.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
0°	0	1	0	∞
90°	1	0	∞	0

Задаци 22.2.3.

1. Израчунати вриједност израза:

а) $\cos^2 30° + \sin^2 45° + \operatorname{ctg}^2 60°$;

б) $\sin^2 60° - \cos^2 45° + \operatorname{tg}^2 30°$;

в) $\frac{\sin 60° - \operatorname{tg} 30°}{\operatorname{ctg} 45° - \cos 60°}$;

г) $\frac{\cos 30° - \operatorname{ctg} 60°}{\operatorname{tg} 45° + \sin 30°}$.

2. Наћи дужине катета једнакокраког правоуглог троугла хипотенузе 10 cm.

3. Правоугли троугао са једним оштрим углом 30° има краћу катету 10 cm. Наћи дужине осталих страница.

4. Наћи краке и висину трапеза основица 5 и 3, чији краци са већом основицом затварају углове 45° и 60°.

5. Наћи дужину краће дијагонале AC и угао $\angle BAC$ правилног шестоугла $ABCDE$ странице 2 cm.

6. Ако је $\alpha + \beta = 90°$ и $\sin\alpha + \cos\beta = 1$, израчунати углове α и β.

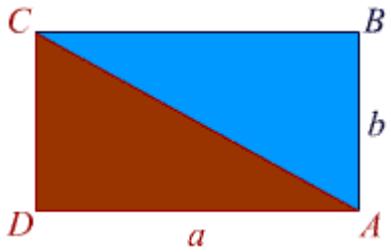
7. Наћи оштар угао $\alpha < 45°$, ако је

а) $2\sin(45° - \alpha) - 5\cos(45° + \alpha) + 1 = 0$;
б) $\operatorname{tg}(\alpha + 30°) = 4 - 3\operatorname{ctg}(60° - \alpha)$.

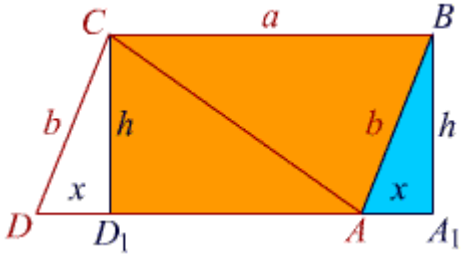
8. Ако су α, β и γ углови троугла, доказати да је:
а) $\sin\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=\cos\frac{\alpha}{2}$; **б)** $\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$.

22.3. Површине

Површина правоугаоника *ABCD* страница *a* и *b* је $P_1 = a\cdot b$. Када га подијелимо дијагоналом *AD*, на слици лијево, добијамо два подударна правоугла троугла *ABC* и *CDA*, чије су површине $P_2 = \frac{1}{2}ab$. Бочна страница $CD = b$ је катета троугла *CDA* али је уједно и висина тог троугла на страницу $a = AD$.

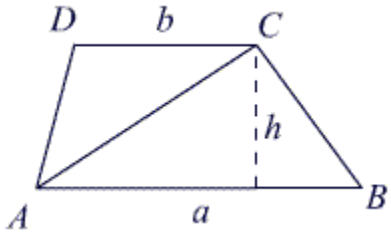


Површина паралелограма *ABCD* странице *a* и висине на ту страницу *h* је $P_3 = a\cdot h$. Наиме, ако датом паралелограму исјечемо правоугли троугао са једне стране и додамо на другу, на слици десно $\Delta DD_1C \cong \Delta AA_1B$, добијамо правоугаоник A_1BCD_1 исте површине.



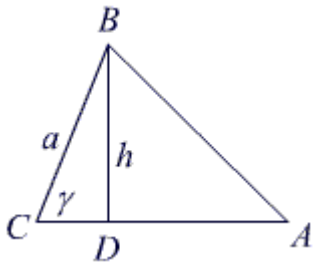
Са друге стране, дијагонала AC дијели дати правоугаоник на два подударна троугла $\Delta ABC \cong \Delta CDA$, једнаких површина. Обрнуто, ако је дат произвољни троугао, на истој слици *ABC* можемо га допунити подударним троуглом *CDA* до паралелограма *ABCD*. Према томе, **површина троугла** странице *a* и висине на ту страницу *h* је $P_3 = \frac{1}{2}ah$.

Површина трапеза основица *a* и *b* и висине *h* је $P_4 = m\cdot h$, гдје је средња линија трапеза $m = \frac{a+b}{2}$ аритметичка средина основица. Наиме, на слици лијево имамо трапез *ABCD* подијељен дијагоналом *AC* на два троугла *ABC* и *ACD* површина $\frac{1}{2}ah$ и $\frac{1}{2}bh$ чији је збир површина трапеза $P_4 = \frac{a+b}{2}h$. То све нам је познато из основне школе.



Став 22.3.1. Површина троугла страница дужина *a* и *b* које полазе из тјемена *C*, односно граде угао γ је $P_\Delta = \frac{ab}{2}\sin\gamma$.

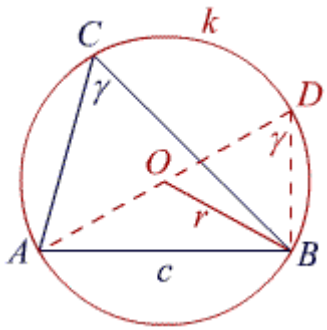
Доказ: Дати троугао ABC, угла $\gamma = \angle ACB$, страница $a = BC$ и $b = AC$, висина $h = BD$ дијели на два правоугла троугла, од којих је један ΔCDB. Из тог троугла налазимо $h = a \cdot \sin\gamma$. У општи израз за површину троугла $P_\Delta = \frac{ah}{2}$ смјенимо нађену висину, па добијамо $P_\Delta = \frac{ab}{2}\sin\gamma$.♦



Теорема 22.3.2. (Синусна теорема) У сваком троуглу важи

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r,$$

гдје су углови α, β и γ наспрам страница a, b и c датог троугла, а r је полупречник троуглу описане кружнице.



Доказ: Дат је троугао ABC уписан у кружницу $k(O, r)$, као на слици лијево. AD је пречник круга, па је угао над пречником $\angle ABD = 90°$. Периферни углови су једнаки, $\angle ADB = \angle ACB = \gamma$, па у правоуглом троуглу ABD имамо $\sin\gamma = \frac{AB}{AD}$, тј. $\frac{c}{\sin\gamma} = 2r$. Аналогно добијамо помјерањем тјемена A и B по кружници.♦

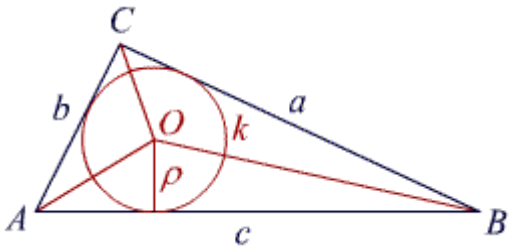
Став 22.3.3. Површина троугла је $P_\Delta = \frac{abc}{4r}$, гдје су a, b и c дужине страница троугла, а r је полупречник кружнице описане око троугла.

Доказ: У формули за површину $P_\Delta = \frac{ab}{2}\sin\gamma$ из претходног става (22.3.1.) замјенимо $\sin\gamma = \frac{c}{2r}$ из синусне теореме (22.3.2.).♦

Ради комплетности се подсјећамо сљедећих формула за површину троугла.

Став 22.3.4. Површина троугла је $P_\Delta = \rho \cdot s$, гдје је ρ полупречник уписане кружнице, а $s = \frac{a+b+c}{2}$ полуобим троугла.

Доказ: Дат је троугао ABC и уписана кружница $k(O, \rho)$, као на сљедећој слици десно. Троуглови ABO, BCO и CAO имају површине $\frac{c\rho}{2}$, $\frac{a\rho}{2}$ и $\frac{b\rho}{2}$ чији збир је површина датог троугла



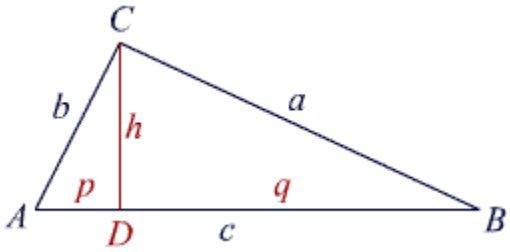
$$P_\Delta = \frac{a+b+c}{2}\rho\,.\blacklozenge$$

Став 22.3.5. (Херонов образац) Површина троугла страница a, b, c је

$$P_\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,,$$

гдје је $s = \frac{a+b+c}{2}$ полуобим троугла.

Доказ: На сљедећој слици лијево дат је троугао ABC са висином CD која на страници прави одсјечке $p + q = c$. Питагорина теорема даје $h^2 = a^2 - q^2 = b^2 - p^2$, одакле $a^2 - b^2 = q^2 - p^2 = (q - p)(q + p) = (q - p)c$. Из система једначина $q + p = c$, $q - p = (a^2 - b^2)/c$, добијамо $q = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}$, $p = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2c}$. Затим



замјеном из $h^2 = a^2 - q^2 = (a - q)(a + q) = \left(a - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}\right)\left(a + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}\right) =$

$$\frac{2ac - c^2 - a^2 + b^2}{2c} \cdot \frac{2ac + c^2 + a^2 - b^2}{2c} = \frac{\left(b^2 - (a-c)^2\right)\left((a+c)^2 - b^2\right)}{4c^2} =$$

$$\frac{[b-(a-c)][b+(a-c)][(a+c)-b][(a+c)+b]}{4c^2} =$$

$$\frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+c+b)}{4c^2} = \frac{2(s-a)\cdot 2(s-c)\cdot 2(s-b)\cdot 2s}{4c^2}.$$ Према томе,

$h^2 = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}$ те $hc = 2\cdot\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Коначно, $P_\Delta = \frac{hc}{2} =$ $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.\blacklozenge$

Задаци 22.3.6.

1. Наћи површину правоугаоника обима 12 и угла између дијагонале и дуже странице 30°.

2. Обим паралелограма је 42, однос висина је 2:3, а оштар угао између страна 60°. Колика је површина паралелограма?

3. Збир двије странице троугла је 12, а висине које њима одговарају су 5 и 3. Колика је површина троугла?

4. Странице троугла су 10 и 12, а угао наспрам мање је 45°. Наћи површину троугла.

5. Основице трапеза су 24 и 10, а краци 13 и 15. Наћи површину трапеза.

6. Странице троугла су 7, 24 и 25. Наћи полупречнике описане и уписане кружнице троугла.

7. Одредити површину троугла ако је задато:
а) $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $a = 4$; **б)** $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, $c = 6$. **в)** $\alpha = 60°$, $a = 3$, $b = 2$.

$$[\,2(3+\sqrt{3})\,;\ 9(\sqrt{3}-1)\,;\ \frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2}\,]$$

8. Над катетама a, b и хипотенузом c правоуглог троугла конструисани су квадрати, а слободни врхови тих квадрата су спојени. Колика је површина добијеног шестоугла?

$$[2(a^2 + ab + b^2)]$$

9. Наћи углове троугла ако је његова површина $\frac{a^2+b^2}{4}$, гдје су a и b странице троугла.

$$[\,P_\Delta = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{a^2+b^2}{4} \Leftrightarrow \sin\gamma = \frac{a^2+b^2}{2ab} \geq 1,$$
па је $\sin\gamma = 1$. Отуда $\gamma = 90°$ и $(a-b)^2 = 0$]

10. Колика је површина троугла чије су тежишнице t_a, t_b и t_c ?

$$[\,\frac{4}{3}\sqrt{t(t-t_a)(t-t_b)(t-t_c)}\ ,\ 2t = t_a + t_b + t_c\,]$$

23. Рјешавање троуглова

Сада, када смо упознали основне тригонометриске функције можемо рећи, **тригонометрија** је грана математике која се бави рјешавањем троуглова помоћу тригонометријских функција.

Рјешавање троуглова је поступак израчунавања свих страна и углова троугла када имамо довољно података за дефинисање троугла. Метод рјешавања зависи од врсте троугла (правоугли, косоугли) и датих вриједности (страна и углова).

Правоугли троугао је дефинисан са:

i. Двије стране. Трећу страну налазимо помоћу Питагорине теореме. Један од два оштра угла налазимо тригонометријског односа двије познате стране.

ii. Једне стране и једног оштрог угла. Други оштар угао је комплементан датом (допуњавају се до 90°). Другу страну можемо наћи помоћу тригонометријске функције која укључује дату страну. Трећу страну налазимо и помоћу Питагорине теореме.

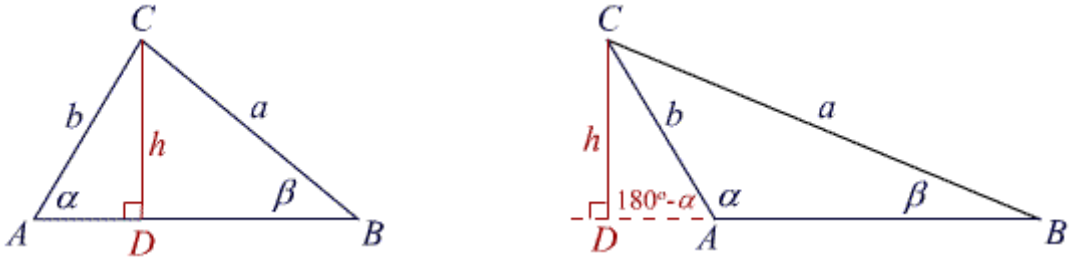
Косоугли троугао дефинишу:

i. Двије стране и захваћени угао. Трећу страну налазимо помоћу косинусне теореме, а други угао помоћу синусне теореме.
ii. Два угла и страна између њих. Трећи угао је допуна дата два до 180°, а остале двије стране налазимо помоћу синусне теореме.
iii. Три стране. Непознате углове налазимо помоћу косинусне теореме (или тригонометријских формула за полууглове).
iv. Двосмислена ситуација. Двосмисленост настаје када имамо синус угла који одговара оштром и њему суплементном тупом углу.

Поред рјешавања троуглова у равни у **раванској тригонометрији**, постоји и рјешавање криволинијских троуглова чије странице припадају највећим кружницама сфере у тзв. **сферној тригонометрији**, којом се овдје не бавимо.

23.1. Синусна теорема

1. На сљедећим сликама су оштроугли и тупоугли троугао *ABC*.



Висина *CD* дијели оба троугла *ABC* на два правоугла троугла *ADC* и *CDB*.

ΔADC: $\sin\alpha = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b\cdot\sin\alpha$ (јер је $\sin(180°-\alpha) = \sin\alpha$)

ΔCDB: $\sin\beta = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a\cdot\sin\beta$.

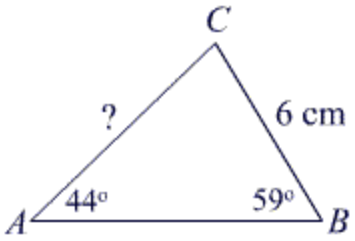
Према томе је $b\cdot\sin\alpha = a\cdot\sin\beta$, тј. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Ако подјелимо исти троугао *ABC* на два правоулгла троугла висином из *A* добићемо сличан резултат $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

Комбинујући ове једнакости добијамо онај најважнији дио нама већ познате синусне теореме (22.3.2.) који нам треба за рјешавање троуглова:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\beta}.$$

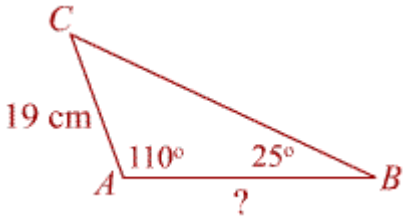
2. Синусном теоремом рјешавамо троугао када је су познате двије стране и угао наспрам једне од њих, када је позната једна страна и два угла.

3. На примјер, у ΔABC, $BC = 6$ cm, $\angle A = 44°$ и $\angle B = 59°$. Наћи дужину AC.



Из синусне теореме имамо $\frac{AC}{\sin\angle B} = \frac{BC}{\sin\angle A}$, а отуда $AC = \frac{\sin 59°}{\sin 44°}\cdot BC \approx 7{,}40364$ центриметара, приближно на пет децимала. Исти резултат $AC \approx 7{,}40$ cm је написан приближно са три значајне цифре (двије децимале).

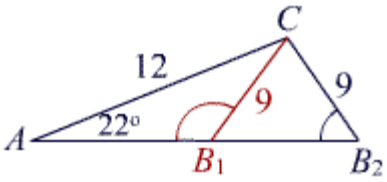
4. На примјер, у ΔABC, $AC = 19$ cm, $\angle A = 110°$ и $\angle B = 25°$. Наћи AB.



Збир углова у троуглу је $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, па је $\angle C = 45°$. Из синусне теореме, $\frac{AB}{\sin 45°} = \frac{19}{\sin 25°}$, слиједи $AB = \frac{\sin 45°}{\sin 25°}\cdot 19 \approx 31{,}78999$ cm, приближно на 5 децимала, односно $AB \approx 31{,}8$ cm заокружено на 3 значајне цифре (једна децимала).

5. Двосмисленост се јавља у случају када је троугао дефинисан са двије стране и углом. Када је угао између страна (сус) нема двосмислености. Међутим, када је угао наспрам мање од страна (ссу), онда су могућа два троугла са истим датим елементима, као што смо видјели код ставова подударности троуглова (&11.).

6. На примјер, у ΔABC, $\angle A = 22°$, $BC = 9$ cm, $AC = 12$ cm. Наћи $\angle B$.



На слици лијево, видимо да постоје два троугла са датим елементима. То су ΔAB_1C и ΔAB_2C, који имају различите, суплементне углове у тјеменима B_1 и B_2, и различите дужине страна AB_1 и AB_2. Суплементни углови имају исте синусе, па у оба случаја важи иста синусна теорема $\frac{12}{\sin B_1} = \frac{12}{\sin B_2} = \frac{9}{\sin 22°}$. Како онда рјешавати такав троугао?

Како суплементни углови имају једнаке синусе, из синусне теореме имамо једну једначину $\sin B = \frac{12}{9}\cdot\sin 22°$ са два рјешења: $\angle B_1 \approx 30°$ и $\angle B_2 \approx 150°$.

Задаци 23.1.7.

1. У ΔABC, $BC = 8$ cm, $\angle A = 46°$ и $\angle B = 58°$. Наћи дужину AC.

2. У ΔABC, $AC = 15$ cm, $\angle A = 105°$ и $\angle B = 31°$. Наћи AB.

3. Рјешити троугао ΔABC, ако је $\angle B = 55°$, $BC = 10$ cm, $AC = 13$ cm.

4. У ΔABC, $\angle A = 25°$, $BC = 8$ cm, $AC = 11$ cm. Рјешити троугао.

5. У једнакокраком троуглу дати су крак $AC = 26{,}6$ cm и угао на основици $\angle A = 47°42'$. Рјешити троугао.

6. Страница ромба је 15,5 cm, а оштар угао између страница 53°34'. Одредити дијагонале ромба.

23.2. Косинусна теорема

Када су дате три странице, троугао није могуће рјешити синусном теоремом. У том случају користићемо сљедећу, косинусну теорему.

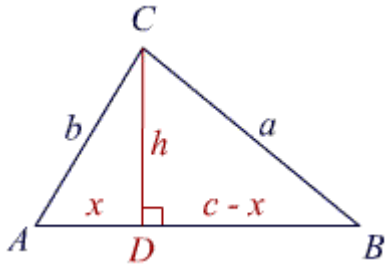
1. (Косинусна теорема) Ако су a, b, c странице троугла ABC, тада важе једнакости:

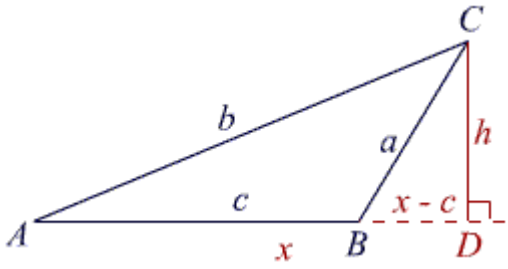
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\angle A$,
- $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cdot\cos\angle B$,
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ac\cdot\cos\angle C$.

Свака од једнакости важи без обзира да ли је угао оштар или туп.

Са друге стране, доказаћемо је користећи Питагорину теорему (за правоугле троуглове).

Доказ: Косоугли и тупоугли троугао ABC, на сљедећим сликама, имају висину





$CD = h$ окомиту на (продужену) страницу AB. Означимо $x = AD$, па је DB једнако $c - x$, или $x - c$. У троуглу ADC важи Питагорина теорема, тј.

$$h^2 = b^2 - x^2, \text{ односно } h^2 = a^2 - (x - c)^2.$$

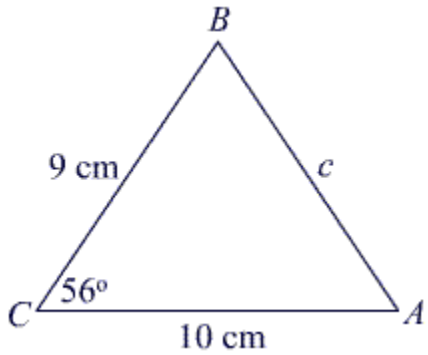
Према томе, $b^2 - x^2 = a^2 - (x - c)^2 \Rightarrow b^2 - x^2 = a^2 - (x^2 - 2cx + c^2) \Rightarrow$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx.$$

Како је $x = b\cdot\cos\angle A$, имамо $a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cdot\cos\angle A$. То је прва од једнакости косинусне теореме. Ако висину вучемо из тјемена A или B на сличан начин добијамо остале двије.♦

Косинусну теорему смо доказали помоћу Питагорине. Са друге стране, посљедња једнакост за $\angle C = 0$, због $\cos\angle C = 0$, постаје Питагорина теорема. Према томе, косинусна теорема је и поопштење Питагорине.

2. У ΔABC, $BC = 9$ cm, $AC = 10$ cm и $\angle C = 56°$. Наћи AB и $\angle A$.



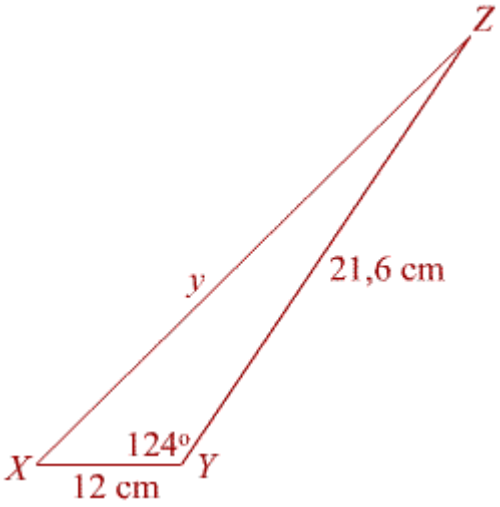
Користећи косинусну теорему за c^2, имамо
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos C \Rightarrow$
$c^2 = 9^2 + 10^2 - 2\cdot9\cdot10\cdot\cos 56° \Rightarrow$
$c = 8{,}96355 \ldots$.
Дакле, $AB = 8{,}96$ cm са 3 значајне цифре.

Из $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0{,}55416\ldots$ слиједи
$\angle A = 56{,}3°$, на три значајне цифре.♦

3. У ΔXYZ, $\angle Y = 124°$, $XY = 12$ cm и $YZ = 21{,}6$ cm. Наћи XZ и $\angle X$.

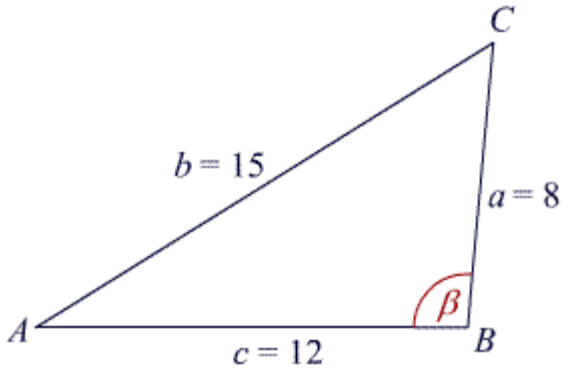
Из $y^2 = z^2 + x^2 - 2zx\cos Y$ слиједи
$y^2 = (12)^2 + (21{,}6)^2 - 2(12)(21{,}6)\cos 124°$,
$y = 30{,}00742 \ldots$, тј.
$XZ = 30{,}0$ cm, са 3 значајне цифре.

Из $\cos X = \dfrac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz} = 0{,}80242$ слиједи
$\angle X = 36{,}6°$, тачно на три значајне цифре.
Када 0,6° помножимо са 60 добијамо
$\angle X = 36°36'$.♦



4. У троуглу ABC, $a = 8$, $b = 15$ и $c = 12$, наћи до најближег степена највећи угао у троуглу.

Наспрам највећег угла налази се највећа страна троугла (Теорема 10.1.7.). Овдје



је то угао β, наспрам стране $b = 15$. Из косинусне теореме имамо

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = -0{,}08854\ldots .$$

Негативан предзнак значи тупи угао. Резултат је $\beta = 95°$, заокружено до најближег степена. ♦

5. Странице троугла су у односу 4:5:6. Наћи најмањи угао троугла и изразити га у степенима, минутама и секундама.

Странице a, b и c троугла износе $4k$, $5k$ $6k$ јединица дужине, гдје је k непознати коефицијент. Најмањи угао је α, наспрам најмање странице $a = 4k$. Из косинусне теореме имамо

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(5k)^2 + (6k)^2 - (4k)^2}{2(5k)(6k)} = \frac{25 + 36 - 16}{60} = 0{,}75.$$

То је тачан резултат. Отуда $\alpha = 41{,}40962211\ldots$ степени, на 8 децимала.

Један степен има 60 минута, па децимални дио степена множимо са 60, добијамо $0{,}40962211\ldots \times 60 = 24{,}5773266\ldots$ минута. Такође, 1 минута има 60 секунди па децимални дио минуте множимо са 60, тј. $0{,}5773266\ldots \times 60 = 34{,}639596\ldots$ секунди. Коначни резултат је $\alpha = 41°\ 24'\ 35''$ заокружено до ближе секунде.

Обрнуто претварање угла $\alpha = 41°\ 24'\ 35''$ датог у степенима, минутама и секундама у степене са децималама овдје је провјера резултата:

$\alpha = 41 + \frac{24}{60} + \frac{35}{60^2} = 41{,}410°$, заокружено на три децимале. ♦

Задаци 23.2.6.

1. У ΔABC, $BC = 21$ cm, $AC = 18$ cm и $\angle C = 62°$. Наћи AB и $\angle B$.

2. У ΔXYZ, $\angle Y = 112°$, $XY = 15{,}4$ cm и $YZ = 17$ cm. Наћи XZ и $\angle Z$.

3. У троуглу ABC, $a = 9$, $b = 17$ и $c = 8$, наћи до најближег степена највећи угао у троуглу.

4. Странице троугла су у односу 7:5:6. Наћи најмањи угао троугла и изразити га у степенима, минутама и секундама.

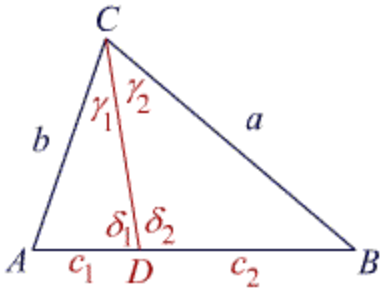
5. Дужина дијагонале правоугаоника је 32 центиметра, а угао између дијагонала је 135°. Наћи дужине страна правоугаоника.

$[16\sqrt{2-\sqrt{2}}\ ,\ 16\sqrt{2+\sqrt{2}}\ \text{ cm}]$

6. У четвороуглу $ABCD$, $AB = 6$ cm, $BC = 7$ cm, $AD = 12$ cm, $\angle ABC = 120°$, $\angle ACD = 70°$. Наћи величину угла $\angle ADC$, на 3 значајне цифре.

24. Геометријски задаци

24.1. Пројективна геометрија



На слици лијево, у троуглу ABC на страници c имамо произвољну тачку $D \in AB$, осим тјемена.

Њоме су дефинисана два троугла ΔADC и ΔBDC. Угао $\gamma = \angle ACB$ подјељен је на два угла $\gamma_1 = \angle ACD$ и $\gamma_2 = \angle DCB$, а страница $c = AB$ на двије $c_1 = AD$ и $c_2 = DB$. Такође, имамо формирана и два суплементна угла $\delta_1 = \angle CDA$ и $\delta_2 = \angle BDC$.

Теорема 24.1.1. У ознакама са претходне слике, важи једнакост

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{b\sin\gamma_1}{a\sin\gamma_2}.$$

Доказ: Синусна теорема даје $\frac{c_1}{b} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\delta_1}$ и $\frac{a}{c_2} = \frac{\sin\delta_2}{\sin\gamma_2}$. Такође је $\sin\delta_1 = \sin\delta_2$, па тврђење теорема слиједи множењем првог пара једнакости.♦

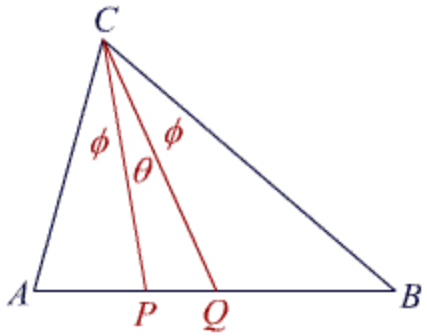
Посљедица 24.1.2. Тежишница из тјемена C троугла ABC једнако је удаљена од врхова B и C.

Доказ: Из претходне теореме, из $c_1 = c_2$ је $b\sin\gamma_1 = a\sin\gamma_2$, а то значи да су висине из A и B на страницу CD троуглова ADC и BDC једнаке.♦

Посљедица 24.1.3. Симетрала угла C дјели наспрамну страницу троугла пропорционално налеглим крацима датог угла.

Доказ: Исто, из $\gamma_1 = \gamma_2$ слиједи $\sin\gamma_1 = \sin\gamma_2$, а затим $c_1 : c_2 = b : a$.♦

Посљедица 24.1.4. Ако су P и Q тачке на страници AB троугла ABC такве да су углови $\angle ACP$ и $\angle QBC$ једнаки, тада је $\frac{AP\cdot AQ}{BP\cdot BQ} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$.



Доказ: На слици лијево имамо $\angle ACP = \angle QBC = \phi$, $\angle PCQ = \theta$. Претходна теорема (24.1.1.) примјењена два пута даје

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AC \cdot \sin\phi}{BC \cdot \sin(\theta+\phi)} \text{ и } \frac{AQ}{BQ} = \frac{AC \cdot \sin(\phi+\theta)}{BC \cdot \sin\phi},$$

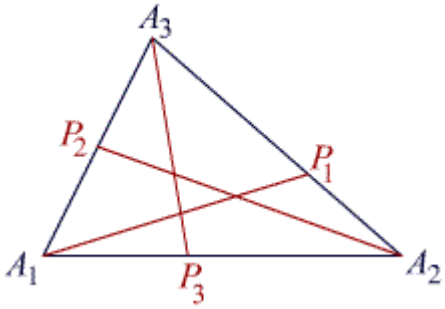
одакле множењем добијамо тражену једнакост.♦

Теорема 24.1.5. Ако су P_1, P_2, P_3 редом на странама A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 троугла $A_1A_2A_3$, тада важи једнакост:

$$\frac{P_1A_2 \cdot P_2A_3 \cdot P_3A_1}{P_1A_3 \cdot P_2A_1 \cdot P_3A_2} = \frac{\sin\angle P_1A_1A_2 \cdot \sin\angle P_2A_2A_3 \cdot \sin\angle P_3A_3A_1}{\sin\angle P_1A_1A_3 \cdot \sin\angle P_2A_2A_1 \cdot \sin\angle P_3A_3A_2}.$$

Другим рјечима, производ односа у којима су странице троугла подјељене једнак је одговарајућем производу синуса наспрамних углова супротних врхова.

Доказ: Из претходне теореме (24.1.1.) имамо:



$$\frac{P_1A_2}{P_1A_3} = \frac{A_1A_2 \cdot \sin\angle P_1A_1A_2}{A_1A_3 \cdot \sin\angle P_1A_1A_3},$$

$$\frac{P_2A_3}{P_2A_1} = \frac{A_2A_3 \cdot \sin\angle P_2A_2A_3}{A_1A_2 \cdot \sin\angle P_2A_2A_1} \text{ и}$$

$$\frac{P_3A_1}{P_3A_2} = \frac{A_1A_3 \cdot \sin\angle P_3A_3A_1}{A_2A_3 \cdot \sin\angle P_3A_3A_2}.$$

Даље, множењем и скраћивањем добијамо тражену једнакост.♦

Двостука пропорција, однос односа у којем је подјела једне странице (A_2A_3) троугла ($A_1A_2A_3$) једнака одговарајућем двоструком односу синуса углова (дјелови $\angle A_1$) наспрамних подјелама дате странице, као у сљедећој теореми.

Теорема 24.1.6. Нека су P_1 и Q_1 произвољне тачке на страници A_2A_3 троугла $A_1A_2A_3$. Тада важи двострука пропорција:

$$\frac{P_1A_2}{P_1A_3} : \frac{Q_1A_2}{Q_1A_3} = \frac{\sin\angle P_1A_1A_2}{\sin\angle P_1A_1A_3} : \frac{\sin\angle Q_1A_1A_2}{\sin\angle Q_1A_1A_3}.$$

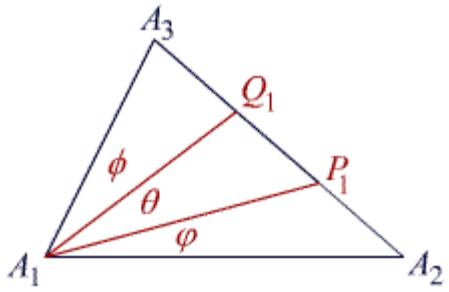
Доказ: Из прве теореме (24.1.1.) имамо $\frac{P_1A_2}{P_1A_3} = \frac{A_1A_2 \cdot \sin\varphi}{A_1A_3 \cdot \sin(\theta+\phi)}$ и

$$\frac{Q_1A_2}{Q_1A_3}=\frac{A_1A_2\cdot\sin(\varphi+\theta)}{A_1A_3\cdot\sin\phi}.$$

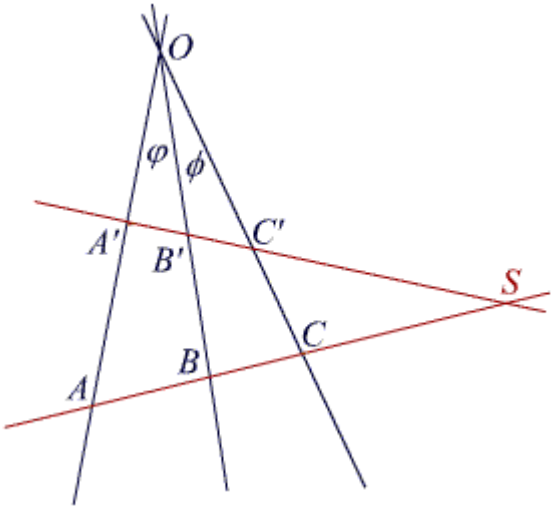
Отуда, дјељењем једнакости слиједи

$$\frac{P_1A_2}{P_1A_3}:\frac{Q_1A_2}{Q_1A_3}=\frac{\sin\varphi}{\sin(\theta+\phi)}:\frac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\phi}.$$

Замјеном ознака са слике десно добијамо тражену двоструку пропорцију.♦



Теорема 24.1.7. Ако три праве које се сијеку у тачки *O* пресјечемо првом трансферзалом у тачкама *A, B, C* и другом трансферзалом у тачкама *A', B', C'*, тада је



$$\frac{AB}{AC}:\frac{A'B'}{A'C'}=\frac{OB}{OC}:\frac{OB'}{OC'}.$$

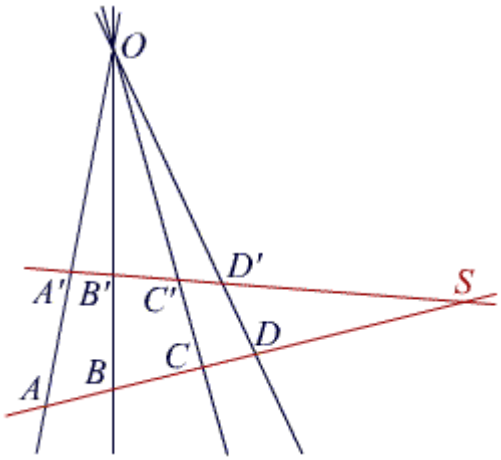
Доказ: На слици лијево, из ΔOAC и $\Delta OA'C'$, поступајући слично доказу прве теореме (24.1.1.) добијамо $\frac{AB}{AC}=\frac{OB\cdot\sin\varphi}{OC\cdot\sin(\varphi+\theta)}$ и $\frac{A'B'}{A'C'}=\frac{OB'\cdot\sin\varphi}{OC'\sin(\varphi+\phi)}$. Дјељењем ових једнакости слиједи тврђење.♦

Теорема 24.1.8. Ако четири праве које се сијеку у једној тачки пресјечемо првом трансферзалом у тачкама *A, B, C, D* и другом трансферзалом у тачкама *A', B', C', D'*, тада је

$$\frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}=\frac{A'C'}{A'D'}:\frac{B'C'}{B'D'}.$$

Ово је фундаментална теорема **пројективне геометрије**, непосредна посљедица претходне теореме (24.1.6.), али се може доказати и другачије.

Доказ: На сљедећој слици десно, посматрајмо троуглове у OAD без праве OB, а затим троуглове у OBD без праве OA.
На основу претходне теореме (24.1.7.) налазимо $\frac{AC}{AD}:\frac{A'C'}{A'D'} = \frac{OC}{OD}:\frac{OC'}{OD'} = \frac{BC}{BD}:\frac{B'C'}{B'D'}$, отуда $\frac{AC}{AD}:\frac{A'C'}{A'D'} = \frac{BC}{BD}:\frac{B'C'}{B'D'}$, па $\frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD} = \frac{A'C'}{A'D'}:\frac{B'C'}{B'D'}$. ♦

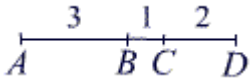


Дефиниција 24.1.9. Унакрсна пропорција (енг. *cross-ratio*) два пара тачака на једној линији, коју називамо и двострука пропорција (енг. *double ratio*), или хармонијска пропорција растојања четири тачке A-B-C-D, је однос

$$(A, B; C, D) = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = \frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}.$$

Као што смо видјели у претходној теореми (24.1.8.) ово је број чија вриједност не зависи од трансферзале, за дате четири праве које се сјеку у једној тачки.

Примјер 24.1.10. Према претходној теореми (24.1.8.) унакрсна пропорција, тј. двострука пропорција је број који се не мјења промјеном трансферзале за дате четири конкурентне тачке. Међутим, то не важи ако промјенимо редосљед тачака, као што се може видјети са сљедеће слике десно.



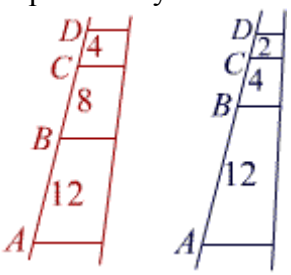
Дате су четири колинеарне тачке A, B, C, D чија су сусједна растојања 3, 1 и 2 редом. Двострука размјера $(A, B; C, D) = \frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD} = \frac{4}{1}:\frac{6}{3} = 2$. Међутим, код промјењеног редосљеда тачака, двострука размјера $(C, A; D, B) = \frac{CD}{AD}:\frac{CB}{AB} = \frac{2}{6}:\frac{-1}{3} = -1$.

Зашто је поменути теорем (24.1.8.) тако важан за пројективну геометрију? Зато што веома мало квантитативних особина неког објекта остаје непромјењено када је пројектовано на цртеж.

Примјер 24.1.11. На сљедећем цртежу лијево видимо жељезничке шине у перспективи. Прагови на слици нису под правим углом према шинама, иако у стварности јесу. Дакле, углови нису сачувани. Размак између прагова представљен у перспективи је све мањи када је приказани дио пруге даљи. Дакле, нити размак између прагова на слици није константан, иако у стварности јесте. Међутим, двострука пропорција дуж једне линије јесте

сачувана!

Пример 24.1.12. Која од сљедеће двије фигуре има реалну перспективу? Растојања између сусједних прагова шина у стварности су једнака. Ако имамо по реду прагове A, B, C, D, тада је $(A, B; C, D) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{2}{1} : \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$. На првој слици с лијева, двострука пропорција је $(A, B; C, D) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ $= \frac{12+8}{8} : \frac{12+8+4}{8+4} = \frac{20}{8} \cdot \frac{12}{24} = \frac{5}{4} \neq \frac{4}{3}$. Дакле, цртеж у црвеној боји са удаљеностима 12, 8 и 4 перспективе није реалан! На другој слици, двострука пропорција је $(A, B; C, D) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{12+4}{4} : \frac{12+4+2}{4+2} = \frac{16}{4} \cdot \frac{6}{18} = \frac{4}{3}$. Према томе, цртеж у плавој боји са размацима 12, 4 и 2 у перспективи је реалан!



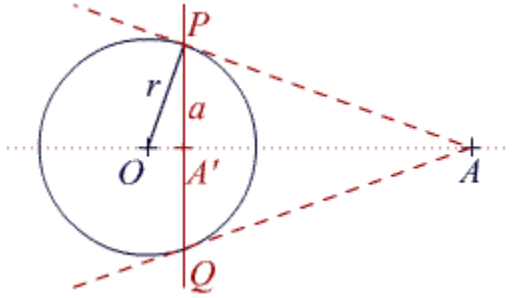
24.2. Пол и полара

Теорија поларе и пола углавном припада пројективној геометрији, али их је могуће третирати и елементарним методама. Са друге стране, разматрајући их из елементарне геометрије добијамо један посебан увид на кругове и праве.

Дефиниција 24.2.1. Дате су три колинеарне тачке A, A', O и круг $k(O, r)$ у истој равни, при чему је $OA \cdot OA' = r^2$. Тада имамо називе.

- **Инверзна слика** тачке A је тачка A'.
- **Круг инверзије** је круг $k(O, r)$.
- **Центар инверзије** је центар O круга k.
- **Полара** је права a која је окомита на OA и садржи тачку A'.
- **Пол** поларе a је тачка A.

На сљедећој слици лијево је лако уочити неколико занимљивих особина инвезне слике, поларе и пола. Тачка A је изван круга $k(O, r)$ у истој равни. Тангенте повучене из A додирују круг k у тачкама P и Q. Права $PQ \in a$ сијече праву OA у тачки A'.



Троуглови $OA'P$, $PA'A$ и OPA су међусобно слични. Из $OP:OA = OA':OP$ сљеди $OA \cdot OA' = r^2$, што значи да су тачке A и A' инверзне и да додирне тачке тангенти повучених из (сада видимо) пола A леже на полари a.

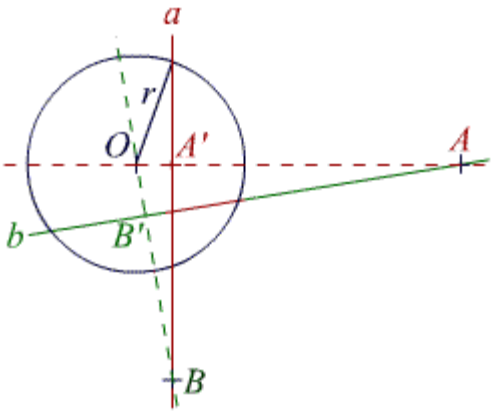
Користећи претходну слику, лако је провјерити сљедећа тврђења.

Теорема 24.2.2.

i. Свака тачка осим центра инверзије има полару, а свака линија која не пролази кроз центар има пол.
ii. Полара тачке на кругу инвезије је тангента на круг у тој тачки, а пол тангенте је тачка додира. Нити у једној другој тачки полара не садржи пол.
iii. Ако је тачка изван круга, полара садржи тачке додира тангенте из пола и круга.

Теорема 24.2.3. Ако једна тачка припада полари друге, онда је друга на полари прве.

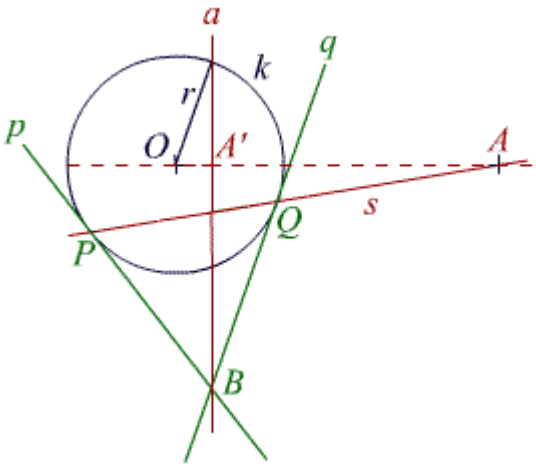
Доказ: Нека је B на полари a тачке A, као на слици даље десно. Њима инвезне тачке означимо са B' и A'; центар инверзије је O. Тада је полара a тачке A окомита на OA у тачки A', а $\Delta OA'B$ је правоугли троугао.



Троуглови $\Delta OA'B$ и $\Delta OB'A$ су слични, јер $r^2 = OA' \cdot OA = OB' \cdot OB \Leftrightarrow OA' : OB = OB' : OA$ и имају заједнички $\angle A'OB'$, па је A на окомици ка OB' у тачки B', која је полара тачке B.♦

Према томе, ако је неколико тачака колинеарно њихове поларе су конкурентне (сјеку се у истој тачки) и обрнуто, ако је неколико линија конкурентно онда су њихови полови колинеарни. Пол линије која спаја двије тачке је тачка пресјека полара тих тачака. Такође, посљедица претходног је и сљедећа теорема.

Теорема 24.2.4. Из дате тачке (A) повучена је сјечица (s) круга (k). У тачкама пресјека круга и сјечице (P и Q) повучене су тангенте (p и q). Ове тангенте се сјеку на полари (a) дате тачке.



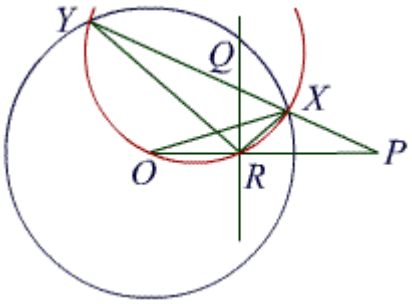
На слици лијево, тангенте у тачкама P и Q, у којима сјечица s из дате тачке A сјече круг k, сјеку се у тачки B на полари a тачке A. На полари тачке B су тачке P, Q и A.

Вјежбе ради, формулишите и докажите и обрнуту теорему!

Дефиниција 24.2.5. Двије тачке од којих свака лежи на полари друге зовемо **коњуговане тачке** датог круга. Двије праве од којих свака садржи пол друге зовемо **коњуговане праве** датог круга.

Теорема 24.2.5. Ако права која садржи двије коњуговане тачке пресјеца кружницу у двије тачке, сваки од пара тачака унутрашњих и вањских дјели онај други пар у истом односу. Другим ријечима, било које двије коњуговане тачке, са тачкама гдје линија која их спаја сјече кружницу, формира хармонијски однос (24.1.9.). Обрнуто, било које двије тачке које су у хармонијском односу са пресјеком кружнице су коњуговане[15].

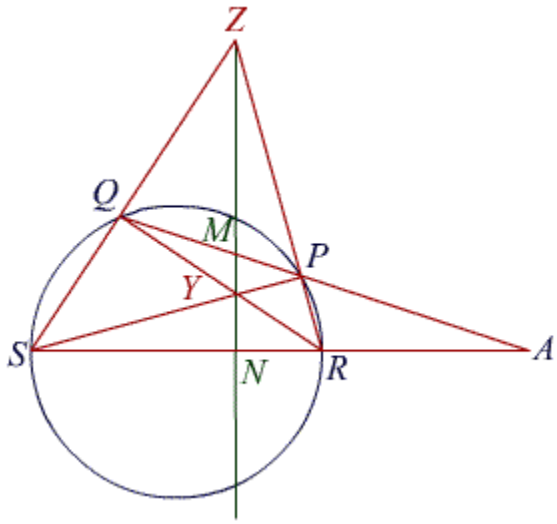
Доказ: Нека је O центар круга, P и Q произвољне коњуговане тачке. Нека PQ сјече кружницу у тачкама X и Y и нека кружница XOY сјече OP у тачки R, као на слици десно. Троуглови OXP и ORX су слични, и према томе R је инверзна P, њена полара је RQ, а $\angle PRQ$ је прав угао. У троуглу XYR симетрала вањског угла R је RP, и према томе на њу окомита RQ је симетрала унутрашњег угла. Како симетрала угла троугла дјели супротну страну у односу налеглих страна (24.1.3.), па према томе P и Q дјели XY изнутра и извана у истом односу, као што је и требало доказати.♦



Теорема 24.2.6. Ако из дате тачке имамо двије праве које сјеку дати круг и њихови пресјеци су спојени у паровима, тада се супротни спојеви сјеку на полари дате тачке.

На сљедећој слици лијево, из A су на круг повучене праве APQ и ARS. Дуж PS сјече QR у тачки Y, а продужеци RP и SQ сјеку се у тачки Z. Доказаћемо да су тачке Y и Z на полари тачке A.

Доказ је директна посљедица Теорема 24.1.1. Нека YZ сјече APQ у M, а ARS у N.



Довољно је показати да је

$$\frac{MP}{MQ} = -\frac{AP}{AQ} \text{ и } \frac{NR}{NS} = -\frac{AR}{AS}.$$

Из поменуте теореме (24.1.1.) имамо

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{ZP \cdot \sin \angle MZP}{ZQ \cdot \sin \angle MZQ} \text{ и}$$

$$\frac{YQ}{YR} = \frac{ZQ \cdot \sin \angle YZQ}{ZR \cdot \sin \angle YZR}, \text{ затим}$$

$$\frac{ZP}{ZR} = \frac{SP \cdot \sin \angle QSP}{SR \cdot \sin \angle QSR} \text{ и}$$

$$\frac{YR}{YQ} = \frac{SR \cdot \sin \angle PSR}{SQ \cdot \sin \angle PSQ}. \text{ Отуда}$$

[15] Ово је теорем пројективне геометрије, гдје се доказује пројективним принципима. Наведени доказ је прилагођен Лахланов (*R. Lachlan*: *An Elementary Treatise on Modern Pure Geometry*,1893.).

$\frac{MP}{MQ} = -\frac{SP \cdot \sin \angle PSR}{SQ \cdot \sin \angle QSR}$. Слично, из 24.1.1. имамо $\frac{AP}{AQ} = \frac{SP \cdot \sin \angle PSR}{SQ \cdot \sin \angle QSR}$, одакле слиједи резултат за *M*. Исти поступак се може примјенити за *N*. Према томе, *MN* је полара *A*.♦

Задатак 24.2.7. Конструисати полару тачке у односу на дати круг користећи само лењира.

Задатак 24.2.8. Конструисати тангенте на дати круг из дате тачке користећи само лењира.